Nr. 9987 Math. F 520 +1

Prudentis Geometria applicata

442.

(520 m

R

Johann Carl Schulze,
wirklichen Mitgliedes der Königl. Preuß. Akademie
der Wissenschaften, Lehrers der Mathe-
matik beym Königl. Preuß. Feld-
Artillerie-Corps,

Taschenbuch

für diejenigen,
so gründliche Anwendungen der Meßkunst
zu machen sich vorsetzen
insbesondere aber
zum Gebrauch
meiner Vorlesungen
abgefasset.

Erstes Heft
welches die
niedere Meßkunst
enthält.

---

mit 11 Kupfertafeln.

Berlin, 1782.
bey August Mylius, Buchhändler
in der Brüderstraße.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Niemand kann den herrlichen Nutzen leugnen, welchen die Wahrheiten der Meßkunst nicht nur in Wissenschaften und Künsten, sondern sogar im gemeinem Leben leisten. Nur ist es Schade, daß gerade diejenigen welche am öftern Gebrauch von diesen Wahrheiten machen könnten und sollten, grösstentheils am wenigsten davon wissen, da es uns doch keineswegen an lehrbüchern fehlet, die Meßkunst gründlich zu erlernen. Ich habe sogar öfters die Erfahrung gemacht, daß leute, welche Unterricht in dieser Wissenschaft gehabt hatten, und in Umständen lebten, wo sie täglich Gebrauch davon machen konnten, nichts oder sehr wenig davon wußten, indessen aber sich leicht den einen oder andern Satz erinnerten, sobald sie nur darauf gebracht, oder der Satz ihnen angeführet wurde, und sich wunderten, daß sie nicht daran gedacht hätten, solchen Satz zu diesem oder jenem Gebrauche zu nutzen. Es

ist andehm, daß es mehrere Sätze der Meßkunst giebt, welche derjenige so einen gründlichen Gebrauch davon machen will, nicht nur wohl eingesehen und verstanden, sondern auch behalten haben muß, indessen ist doch die Anzahl derselben sogar groß nicht, daß dieses nicht leicht geschehen könnte, und da es genug ist, sich ein für allemal von der Richtigkeit eines Satzes überzeuget zu haben, so bleibt zum ausübenden Gebrauch nur noch übrig die Sätze selbsten zu behalten, und zu wissen: wie man einen jeden richtig gebrauchen müsse. Es hat mir daher geschienen, daß eine Sammlung dieser Sätze, nebst einer kurzen Erklärung wie ein jeder verstanden werden müsse, denenjenigen willkommen seyn würde, welche sich zwar bereits von den Wahrheiten der Meßkunst einmal überzeuget haben, deren eigentliches Geschäfte es aber nicht ist, sich damit täglich abzugeben, und folglich leicht den einen oder andern Satz wieder vergessen könnten; um im Fall sie den einen oder andern Satz zu wissen nöthig hätten, ihn nur nachschlagen zu dürfen. Ich habe daher in diesem kleinen Werke unter den Nahmen eines Taschenbuches die nöthigen Sätze gesammlet, und sie unter der allgemeinen Aufschrift **Grundwahrheiten der Meßkunst** abgehandelt, so daß

ein

ein jeder Satz erst allgemein und zwar ohne Beweis vorgetragen, und darauf durch Beyhülfe einer Figur insbesondere erkläret ist worden. Damit aber ein jeder der irgend einigen Zweifel an der Richtigkeit eines Satzes haben möchte, befriediget werde, so habe ich bey jedem Satze die dahin gehörigen §. von zweyen in Deutschland sehr bekannten Lehrbüchern angeführt, wo man immer die zureichenden Beweise nachschlagen kann. So findet man zum Beyspiele bey dem §. 325, in Klammern eingeschlossen (§. 542), und das will sagen der im §. 325 vorgetragene Satz ist in Hrn. von Segners Anfangsgründen der Arithmetik, Geometrie, und der geom. Berechnungen, so wie dieselbigen 1773 zu Halle, aus dem lateinischen übersetzt, herausgegeben seyn worden, im §. 542 erwiesen; die darauf folgende und ebenermaßen in Klammern eingeschlossene Beziehung (XII Prop. 14) zeiget an, daß eben dieser Satz in Euclidis Elementis im 12ten Buche die 14te Proportion ist; und so ist dieses allenthalben zu verstehen wo zu Ende eines Satzes in Klammern eingeschlossene Beziehungen angetroffen werden, dergestalt, daß allemal wo nur der bloße §. angemerkt ist worden, solches von Hrn. von Segners Anfangsgründen zu verste-

hen ist, da aber, wo neben der Römischen Zahl Difinition, Propositition oder Problem nebst einer gewöhnlichen Zahl angetroffen wird, solches von des Euclidis Elementis gilt. Ich habe des Hrn. von **Segners** Lehrbuch deshalb gewählet, weil es unter allen Lehrbüchern dieser Art wegen der bündigen Kürze und nöthigen Deutlichkeit, denen vorzüglich empfohlen werden kann, welche die Meßkunst nicht sowohl erlernen wollen, um ihren Kopf dadurch aufzuräumen, und sich zum Denken und Nachforschen geschickt zu machen, als für welche des Euclidis und andere neuere Werke von einem unumgänglich nöthigen Gebrauche sind, sondern die sich vorzüglich vorsetzen, die Sätze der Meßkunst in kurzer Zeit zu erlernen, um sie zu bestimmten Absichten gebrauchen und anwenden zu können, dazunächst aber von ihren anderweitigen Geschäften nicht so viel Zeit abbrechen können als zum tiefern Eindringen, Nachforschen und Untersuchungen der Meßkunst erfordert wird.

Da es unumgänglich nöthig ist, vor allen Dingen, sich von jeder Sache einen richtigen Begrif zu machen, so habe ich die sämmtlichen **Erklärungen der Meßkunst** den Grundwahrheiten derselben vorgesetzt. Hier habe ich

es

es nun gewagt verschiedene Namen deutsch zu geben, welche bis jetzt noch aus dem griechischen waren beybehalten worden. Ich lasse es dahin gestellt seyn, ob ich bey diesen Benennungen glücklich gewesen bin oder nicht. Indessen hal= te ich mich eben sowohl berechtiget einen Cylin= der eine runde Säule, oder ein Prismen eine eckigte Säule zu nennen, als man berechtiget gewesen ist: den Cubum einen Würfel zu hei= ßen, da offenbar diese letzte Benennung bloß vom Wurfe deswegen hergenommen ist, weil man dergleichen kleine Körperchen zum Spiele gebraucht, um mit der Hand dieselben zu wer= fen; Cylinder und Prismen aber Körper sind, die wir im gemeinen Leben als Stützen gebrau= chen, und Säulen zu nennen pflegen. Es kommt übrigens bloß darauf an, sich an diesen neuen Benennungen zu gewöhnen, um einmal aus deutschen Schriften die fremden Wörter, so viel als möglich ist, wegzuschaffen, und sie durch gute deutsche Wörter zu ersetzen. Ich gestehe, daß ich es nicht allenthalben habe thun können, noch habe thun wollen, da ich für viele Wörter als Product, Quotient, und einige andere keine kurze gleichvielbedeutende deutsche Wörter fin= den konnte, und manche fremden mit deutschen Endungen dergleichen Punkt, Linie, und

andere

andere mehr, schon in der deutschen Sprache das Vorrecht erhalten haben.

Um übrigens die Sätze oder Grundwahrheiten der Meßkunst so viel als es sich immer thun ließ, anzuwenden, und ihren Gebrauch zu zeigen, habe ich mehrere Aufgaben der Meßkunst gesammlet, und sie unter der allgemeinen Aufschrift **Zeichnungen der Meßkunst** abgehandelt, wobey ich denn jedesmal den Grund angegeben habe, auf welchem sich die Zeichnung stützet, und da, wo es nöthig war den Beweis zusammenhängend zu führen, ihn wirklich geführet.

Endlich machen die **Berechnungen der Meßkunst**, nebst einigen Tafeln den Beschluß dieses Taschenbuches. Erstlich ist, für jede Art der Berechnung eine Formel oder ein allgemeiner Ausdruck angegeben worden, um aber für diejenigen so Schwürigkeiten finden möchten, die Formeln bey den Berechnungen zu gebrauchen, Regeln zur Auflösung zu geben, habe ich aus jeder Formel eine Regel in Worten gezogen, die Formel selbst aber in den mehresten Fällen, und immer wo es nöthig war, durch Beyspiele erläutert.

Uebri=

Uebrigens sind bey diesem Taschenbuche mehrere Sätze der Rechenkunst als bekannt vorausgesetzet worden. Ich konnte dieses thun, da es keineswegen als ein Lehrbuch der Meßkunst gebrauchet werden soll, sondern nur eine Sammlung der Sätze dieser Wissenschaft, oder ein Hülfsmittel abgeben soll, wodurch diese Sätze dem Gedächtniße durch öfteres Uebersehen desto besser können eingepräget, und unvergeßlich gemacht werden. Uebrigens habe ich es so eingerichtet, daß es mir zu einem Leitfaden dienen könne, um Vorlesungen über die Meßkunst und deren Anwendung zu halten, und dieses ist der Grund warum die Sätze hier in der Ordnung auf einander folgen, wie ein jeder aus vorhergegangenen Sätzen erwiesen werden kann; ausser diesem Umstande wäre es leicht gewesen sie entweder nach alphabetischer Ordnung, oder nach Maaßgabe der Materie auf einander folgen zu laßen.

Ich erwarte geduldig das Urtheil der Kenner über dieses kleine Werk, da mir Lob und Tadel gleich lieb sind, wenn sie nur gegründet sind, und ich mich überzeugen kann, durch meine Arbeit der Welt genutzet zu haben. Ich habe den möglichsten Fleiß im Nachsehen der Probe-

bögen

bögen angewandt, da es aber wohl nicht zu hoffen möglich ist, daß nicht hin und wieder Fehler stehen geblieben seyn sollten, so ersuche ich den Leser solche selbsten gütigst verbeßern zu wollen, und mich zu entschuldigen.

Berlin im April des Jahres 1782.

Nachricht.

Der zweyte Heft dieses Taschenbuches, welcher die Dreyeck-Meßkunst (Trigonometrie) enthalten wird, soll geliebts Gott künftige Leipziger Michaelis-Meße fertig werden.

Allge-

Allgemeiner Begrif der Meßkunst.

§. 1.

Die Meßkunst ist eine Wissenschaft, welche lehret den Raum zu bestimmen, den die Cörper in der Welt einnehmen. Diesen Raum nennen wir auch des Cörpers Ausdehnung, und sprechen daher: ein jeder Cörper ist ausgedehnt; welche Eigenschaft der Cörper auch von ihren übrigen Eigenschaften unabhängig ist. Daher siehet die Meßkunst bey den Cörpern bloß auf die Ausdehnung oder auf den Raum den sie ausfüllen, ohne sich im mindesten bey den übrigen Eigenschaften aufzuhalten.

§. 2.

Die Kennzeichen, wodurch die Cörper von einander in der Meßkunst unterschieden werden, nehmlich ob der eine größer, gleich, oder kleiner als der andere sey, oder welches Verhältniß überhaupt zwey Cörper, ihrer Ausdehnung nach,

gegen einander haben, müssen daher aus der Lage, Ordnung, und Verbindung ihrer Theile und Grenzen hergeleitet werden.

§. 3.

Die Meßkunst wird in zwo Theile zerfällt, nehmlich in die niedere und höhere Meßkunst. Kann nehmlich der Raum eines Cörpers dadurch bestimmt werden, daß man bloß gerade Linien und Kreise bey der Untersuchung gebraucht, so ist dies ein Vorwurf der niedern Meßkunst. Alle andere Fälle aber, die sich nicht bloß durch gerade und Kreislinien auflösen lassen, sondern wo noch andere krumme Linien und deren Eigenschaften in Betrachtung kommen, gehören zur höhern Meßkunst.

§. 4.

Bey den Untersuchungen der niedern Meßkunst wird bloß ein Linial und ein Zirkul zu gebrauchen erlaubt, und eine Zeichnung oder ein sonstiger Entwurf der in dieser Absicht mittelst gedachter Werkzeuge in einer Ebene gemacht worden, wird eine geometrische Zeichnung oder Entwurf genannt. Diese Zeichnungen mögen aber auch noch so genau verfertiget werden, so geben sie doch

nur

nur unvollkommene Bilder dessen was man sich darunter vorstellet, und davon eigentlich nur die Wahrheiten gelten, welche man mittelst dieser Bilder oder Figuren erweiset.

§. 5.

In der Meßkunst gedenket man sich die Cörper beständig als stetige Größen, das will sagen als solche deren Theile unmittelbar aneinander hängen, so daß wo ein Theil aufhört, sogleich der andere wieder anfängt ohne daß dabey der mindeste Zwischenraum in Betrachtung kömmt. Die Theile eines solchen Cörpers stehen nun unter einander in solcher Verbindung, daß der eine immer in Rücksicht des andern oben, unten, oder neben demselben liegt. Hieraus wird der Ausdruck verständlich ein geometrischer Cörper ist eine nach allen Seiten ausgedehnte Größe. Welche Eigenschaft den geometrischen Cörper von andern gleichfalls ausgedehnten Größen unterscheidet.

Erklärungen der Meßkunst.

§. 6.

Ein geometrischer Cörper ist nach allen Seiten ausgedehnt, nehmlich

nach Länge, Breite und Dicke (§. 247) (XI Def. 1).

§. 7.

Die Grenzen eines geometrischen Cörpers sind Oberflächen und nur nach Länge und Breite ausgedehnt. (§. 247. 248) (XI Def. 2 et 1 Def. 5).

§. 8.

Die Grenzen der Oberflächen sind, Linien, und nur der Länge nach ausgedehnt. (§. 247 248) (1 Def. 6 et 2).

§. 9.

Die Grenzen der Linien sind Punkte, und haben keine Ausdehnung. (§. 247 248) (1 Def. 3 et 1).

§. 10.

Eine gerade Linie ist, welche nach einerley Strecke zwischen ihren Grenzen liegt. (1 Def. 4).

Tab. I. Eine solche Linie ist AB fig. 1 welche zwischen den Punkten A und B nach einerley Strecke liegt, das will sagen weder nach C noch D wie fig. 2 abweichet.

§. 11.

Eine krumme Linie ist, in welcher kein Theil gerade ist. (§. 249).

Eine

Eine solche Linie ist AB fig. 3 in welcher kein Theil, wie CD, so klein er auch immer genommen wird, gerade ist. Tab. I.

§. 12.

Eine vermischte Linie ist, welche aus geraden und krummen Linien zugleich zusammengesetzt ist. (§. 249).

Eine dergleichen Linie ist AB fig 4 in welcher AC grade, CD krumm, DE wieder grade, EF aber krumm, und endlich FB wieder grade ist. Tab. I.

§. 13.

Eine gebrochene Linie ist, welche entweder aus mehrern geraden oder krummen Linien zusammengesetzt ist. (§. 249).

Eine solche aus mehrern geraden Linien zusammengesetzte Linie ist AB fig. 2 deren Theile AC, CD, DB lauter gerade Linien sind. Hingegen ist AB fig. 5 eine aus mehreren krummen Linien AC, CD, DB zusammengesetzte gebrochene Linie. Tab. I.

§. 14.

Eine ebene Fläche oder eine Ebene ist welche nach einerley Strecke zwischen ihren Grenzen liegt. (1 Def. 7).

Eine solche ebene Fläche oder Ebene ist jederzeit dadurch zu erkennen daß alle Theile einer graden Linie zwischen zween Punkten dieser Ebene gezogen, ganz mit dieser Ebene zusammen fallen müssen, woraus zugleich erhellet daß **eine solche Ebene durchaus nach geraden Linien ausgedehnt ist.** (§. 253).

Eine solche Ebene ist die Fläche eines stillstehenden Wassers auf welcher man zwischen jegliche zween Punkten eine gerade Linie so legen kann, daß alle Theile derselben die Oberfläche des Wassers berühren.

§. 15.

Eine krumme Oberfläche ist, in welcher kein Theil eben ist. (§. 253).

Eine solche krumme Oberfläche ist die Oberfläche einer Kugel auf welcher auch der kleinste Theil nicht eben ist.

§. 16.

Ein ebener geradliniger Winkel ist die Neigung zwoer verschiedenen, aus einem Punkte in einer Ebene gezogenen, geraden Linien gegeneinander. (§. 257) (Def. 8 et 9).

Tab I. Einen dergleichen Winkel bilden die beiden geraden Linien B A, B C fig. 6 n° 1 die beide in der Ebene des Papieres aus dem Punkte B sind gezogen worden, und eine gewisse Neigung bey B gegen einander haben.

§. 17.

§. 17.

Ein ebener krummliniger Winkel ist die Neigung zwoer in einer Ebene aus einem Punkte gezogenen krummen Linien.

Einen solchen Winkel schließen die krummen Linien BA, BC fig. 6 n° 2 bey B ein, welche eine bestimmte Neigung gegeneinander bey B haben. Tab. I.

§. 18.

Ein unebener Winkel ist die Neigung zwoer krummen Linien die aus einem Punkte einer krummen Oberfläche in derselben sind gezogen worden.

Einen solchen Winkel bilden auf der Oberfläche einer Kugel zwey aus einem Punkte in derselben gezogene Bogen.

§. 19.

Ein Schenkel oder eine Seite des Winkels heißt eine jede der Linien die den Winkel einschließen. (§. 257).

Dergleichen sind fig. 6 n° 1. 2 die Linien BA, BC. Tab. I.

§. 20.

Die Spitze oder der Scheitel eines Winkels heißt der Punkt aus welchem die

Schenkel oder Seiten des Winkels gezogen sind.

Tab. I. Dergleichen sind die Punkte B fig. 6 nº 1. 2.

Anmerkung. Wenn in einem Punkte wie B fig. 6 nº 1. 2 nur der Scheitel eines einzigen Winkels liegt, so kann derselbe bloß durch einen einzigen Buchstaben, nehmlich mit dem an der Spitze befindlichen bezeichnet werden, und man versteht ohne Irthum, wenn man sagt: der Winkel B, daß dies die Neigung der beyden Linien BA, BC seyn soll. Treffen aber die Spitzen mehrerer Winkel in einem Punkt zusammen, wie fig. 7 so muß man, um Irthum zu vermeiden, einen jeden Winkel durch drey Buchstaben bezeichnen, davon jedesmahl derjenige in der Mitte stehen muß, welcher sich an der Spitze der Winkel befindet. So kann man die Neigung der beiden Linien BA, BC fig. 7 gegeneinander den Winkel ABC, die Neigung der Linien BC, BD gegeneinander den Winkel CBD und endlich die Neigung BD gegen BE den Winkel DBE nennen.

§. 21.

Ein Nebenwinkel ist ein solcher Winkel der dicht an einen andern anschließt.

Der-

Dergleichen Winkel sind fig. 7 ABC und Tab. I. CBD oder CBD und DBE davon wechselseitig einer an den andern anschließt.

§. 22.

Eine senkrechte Linie ist diejenige welche gegen eine andere so gezogen ist, daß die daher enstehende Nebenwinkel einander gleich werden. (§. 264) (1 Def. 10)

Ein solche Linie ist CD der 8ten Figur wel- Tab. I. che gegen AB so ist gezogen worden, daß die Nebenwinkel ADC und CDB einander gleich werden.

§. 23.

Ein rechter Winkel ist derjenige welchen zwey Linien die auf einander senkrecht stehen einschließen. (§. 264) (1 Def. 10).

Solche Winkel sind ADC oder CDB der Tab. I. 8ten Figur.

§. 24.

Eine Linie fällt schief gegen eine andere, wenn die daher entstehende **Neben-Winkel ungleich** sind. (§. 268).

So fällt in der 9ten Figur CD gegen AB Tab. I. schief, weil die Winkel ADC, CDB ungleich sind.

§. 25.

Ein schiefer Winkel ist derjenige, welcher von zwoen Linien die gegeneinander schief fallen, eingeschlossen wird. (§. 268).

Tab. I. Die Winkel ADC, CDB der 9ten Figur sind demnach schiefe Winkel.

§. 26.

Ein spitzer Winkel ist ein solcher schiefer Winkel der kleiner als ein rechter ist. (§. 268) (1 Def. 12).

Tab. I. Ein solcher Winkel ist CDA der 9ten Figur der kleiner als ein rechter ist.

§. 27.

Ein stumpfer Winkel ist ein solcher schiefer Winkel der größer als ein rechter ist. (§. 268) (1 Def. 11).

Dergleichen ist der Winkel CDB der 9ten Figur der größer als ein rechter ist gemacht worden.

§. 28.

Wechselwinkel sind solche Winkel die einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, mit ihren Oefnungen aber gegen verschiedene Seiten gerichtet sind.

Tab. I. Solche Winkel sind die beyde CAB, ABD der 10ten Figur welche die Linie AB zum gemeinschaftlichen Schenkel haben, und mit ihren

Def=

Oefnungen auf verschiedenen Seiten dieser Linie AB liegen.

§. 29.

Scheitelwinkel, werden diejenigen genannt die einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, deren Schenkel aber in graden Linien zusammenfallen.

Dergleichen sind die Winkel AED, CEB oder AEC, DEB fig. 11 davon jedes Paar den Scheitel E gemein hat, und deren Schenkel AE, EB, DE, EC in graden Linien zusammenfallen. Tab. I.

§. 30.

Gleichlaufende oder parallel Linien werden diejenigen geraden Linien genannt die in einerley Ebene liegen und niemahls zusammenlaufen, man mag sie auf beyden Seiten verlängern wie man will. (§. 277) (1 Def. 34).

Die graden Linien AB, CD der 12ten Figur sind gleichlaufend oder parallel weil sie beyde in einerley Ebene nehmlich in der Ebene des Papieres sind gezogen worden, und nicht zusammenlaufen, man mag sie auf beyden Seiten verlängern wie man will. Tab. I.

§. 31.

§. 31.

Eine Figur ist ein Körper oder eine Oberfläche, der oder die auf allen Seiten begrenzt ist. (§. 286) (1 Def. 14).

Tab. I. Ein jeder Körper in der Natur, dessen Ausdehnung begrenzt ist, giebt demnach eine Figur. Eben so ist eine Oberfläche fig. 13 die auf allen Seiten begrenzt ist, eine Figur.

§. 32.

Der Umkreis oder Umfang einer Figur ist die Grenze welche dieselbe einschließt. (§. 286).

Da die Grenzen der Körper Oberflächen sind §. 7 so besteht auch bey einem Körper der Umkreis seiner Figur aus eine oder mehrern Oberflächen. Da hingegen die Grenzen der Oberflächen §. 8 linien sind, so besteht, bey einer Oberfläche, der Umkreis ihrer Figur aus

Tab. I. einer oder mehrerer Linien z. B. wie fig. 13 aus den Linien AB, BC, CD, DE, EA, oder wie fig. 14 aus einer einzigen, in sich selbst, zurückkehrenden Linie.

§. 33.

Seiten einer Figur heißen die Oberflächen, oder die Linien aus welchen der Umkreis einer Figur besteht. (§. 286).

Tab. I. So können die Linien AB, BC etc. der

13ten Figur Seiten der Figur ABCDE genannt werden.

§. 34.

Eine Kreisfläche ist eine von einer einzigen krummen Linie begrenzte ebene Figur, welche krumme Linie die Eigenschaft hat, daß ein jeglicher Punkt in derselben, von einem gewissen, innerhalb der Figur liegenden, Punkte gleich weit entfernt ist. (§. 290) (1 Def. 15).

Dergleichen ist die 15te Figur, die von einer einzigen krummen Linie BCDB begrenzt wird, in welcher ein jeder Punkt wie B, C, D von einem Punkte A innerhalb der Figur gleich weit entfernt ist, dergestalt daß die Linien AB, AC, AD einander gleich werden. Tab. I.

§. 35.

Eine Kreislinie ist die krumme Linie welche die Kreisfläche begrenzt. (1 Def. 15).

Die krumme Linie BCDB fig. 15 ist demnach eine Kreislinie. Tab. I.

§. 36.

Der Mittelpunkt des Kreises ist derjenige Punkt, von welchem alle Punkte der Kreislinie gleichweit entfernt sind. (§. 290.) (1 Def. 16).

Dergleichen ist der Punkt A fig. 15. Tab. I.

§. 37.

§. 37.

Der Halbmesser ist die Entfernung eines jeden Punktes der Kreislinie vom Mittelpunkte. (§. 290).

Tab. I. Dergleichen sind die graden Linien AB, AC, AD fig. 15.

§. 38.

Geradlinigte Figuren sind, die von lauter graden Linien eingeschlossen werden. (§. 294) (1 Def. 20).

Tab. I. Eine solche Figur ist ABCDEFG fig. 16 die von den graden Linien AB, BC, CD, DE, EF, FG, GA, welche Seiten dieser Figur sind, eingeschlossen wird.

§. 39.

Ein Dreyeck ist eine gradlinigte Figur von dreyen Seiten. (§. 298) (1 Def. 21).

Tab. I. Dergleichen ist die Figur ABC fig. 17 welche von den dreyen Seiten AB, BC, AC eingeschlossen ist.

§. 40.

Ein ungleichseitiges Dreyeck ist dasjenige welches drey ungleiche Seiten hat. (§. 300) (1 Def. 26).

Tab. I. Ein solches ist ABC fig. 17 wo die drey Seiten die es einschließen einander ungleich sind.

§. 41.

§. 41.

Ein gleichseitiges Dreyeck ist, dessen drey Seiten einander gleich sind. (§. 300) (1 Def. 24).

Ein solches stellt die 18te Figur dar, bey welcher die Seiten AB, BC, AC einander gleich gemacht worden. Tab. I.

§. 42.

Ein gleichschenklichtes Dreyeck ist, welches zwey gleiche, und eine ungleiche Seite hat. (§. 300) (1 Def. 25).

In der 19ten Figur ist ein dergleichen Dreyeck vorgestellt, in welcher AB, AC einander gleich sind, BC aber ungleich ist. Tab. I.

§. 43.

Die Grundlinie des gleichschenklichten Dreyecks ist, die ungleiche Seite eines solchen Dreyeckes. (§. 300).

Dergleichen ist BC der 19ten Figur. Tab. I.

§. 44.

Die Schenkel eines gleichschenklichten Dreyeckes sind, die gleichen Seiten eines solchen Dreyeckes. (§. 300).

So werden, wenn fig. 19 ABC ein gleichschenklichtes Dreyeck ist, die gleichen Seiten AB, AC desselben, Schenkel genannt. Tab. I.

§. 45.

§. 45.

Ein rechtwinklichtes Dreyeck ist, das einen rechten Winkel hat. (§. 309) (1 Def. 27).

Tab. I. Ein solches Dreyeck stellt fig. 20 vor, in welcher ABC ein rechter Winkel ist.

§. 46.

Ein stumpfwinklichtes Dreyeck ist, das einen stumpfen Winkel hat. (§. 309) (1 Def. 28).

Tab. I. Dergleichen ist das Dreyeck ABC fig. 21 worinnen der Winkel ABC stumpf genommen worden.

§. 47.

Ein spitzwinklichtes Dreyeck ist, welches drey spitze Winkel hat. (§. 309) (1 Def. 29).

Tab. I. Die 17te Figur stellt ein solches Dreyeck vor, in welchem die Winkel A, B, C lauter spitze Winkel sind.

§. 48.

Ein äußerer Winkel des Dreyecks ist, ein Winkel welcher ausserhalb eines Dreyeckes durch die Verlängerung einer seiner Seiten entsteht. (§. 306).

Tab. I. Wenn in Figur 17 die eine Seite BC bis in D verlängert wird, so entsteht ein Winkel ACD

ACD welcher der äussere Winkel des Dreyecks ABC genannt wird. Es ist aber ganz gleichgültig, sowohl, welche von den dreyen Seiten man verlängern will, als auch, nach welcher Gegend dieselbe fortgezogen wird.

§. 49.

Innere dem äussern entgegen stehende Winkel eines Dreyecks sind die zwey Winkel eines Dreyecks davon keiner dem äussern anliegt oder ein Nebenwinkel des äussern ist. (§. 306).

So werden A und B fig. 17 innere dem äussern ACD entgegenstehende Winkel genannt, da keiner von beyden ein Nebenwinkel dieses äussern ist. Tab. I.

§. 50.

Ein Viereck ist, eine ebene geradlinigte Figur von vier Seiten. (§. 293) (1 Def. 22).

Ein dergleichen Viereck stellt die 22te Figur vor, in welcher die Seiten AD, DC, BC, AB ganz willkührlich sind gezogen worden. Tab. I.

§. 51.

Ein gleichgestrecktes Viereck (Parallelogram) ist ein Viereck dessen gegenüberstehende Seiten gleichlaufende Linien sind. (§. 310).

Tab. I. Ein dergleichen Viereck ist ABCD fig. 23 in welcher AD mit BC und AB mit DC gleichlaufend ist.

§. 52.

Ein Rechteck ist ein gleichgestrecktes Viereck welches lauter rechte Winkel hat. (§. 315) (1 Def. 31.)

Tab. II. Die 24te Figur stellt ein solches Rechteck vor, in welcher die Winkel A, B, C, D lauter rechte Winkel sind.

§. 53.

Ein ordentliches Viereck oder Quadrat ist ein Rechteck in welchem alle vier Seiten einander gleich sind.

Tab. II. Ein solches Viereck ist ABCD fig. 25 in welcher die Seiten AB, BC, CD, AD einander gleich genommen worden, und die Winkel A, B, C, D rechte Winkel sind.

§. 54.

Die schiefe Seite (hypothenusa) **eines rechtwinklichten Dreyeckes ist diejenige welche den rechten Winkel des Dreyeckes gegenübersteht.**

Tab. I. Dergleichen ist fig. 20 die Seite AC.

§. 55.

Rechte Seiten (Cathetæ) **eines rechtwinklichten Dreyeckes sind sol-**

solche die den rechten Winkel eines dergleichen Dreyeckes einschließen.

So werden AB, BC fig. 20 rechte Seiten des rechtwinklichten Dreyeckes ABC genannt. Tab. I.

§. 56.

Eine Querlinie (Diagonale) der Figur ist diejenige grade Linie welche in jeder beliebigen Figur von einer Ecke bis zur andern läuft.

Dergleichen sind fig. 26 die graden Linien BD, AD. Tab. II.

§. 57.

Alle ebene gradlinigte Figuren von mehr als vier Seiten werden allgemein Vielecke genannt. Insbesondere benennt man sie auch nach der Anzahl ihrer Seiten oder Ecken.

So werden fig. 16 und fig. 26 allgemein Vielecke genannt. Insbesondere heißt aber fig. 16 ein Siebeneck, fig. 26 aber ein Fünfeck, weil erstere, sieben, letztere aber nur fünf Seiten oder Ecken hat. Tab. I. et Tab. II.

§. 58.

Die Sehne eines Kreises ist eine in der Kreisfläche gezogene grade Linie welche zwey Punkte der Kreislinie miteinander verbindet. (§. 351).

Tab.II. Die gerade linie AB fig. 27 welche die beyde Punkte A und B der Kreislinie verbindet, ist eine Sehne des Kreises.

Man benennt eine dergleichen Sehne nach dem Bogen der Kreislinie dessen Endpunkte diese Sehne verbindet; so sagt man: AB sey die Sehne der Bögen ACB und ADB, woraus zugleich erhellet, daß jede Sehne zu zween Bögen gehört.

§. 59.

Der Durchmeßer eines Kreises ist eine Sehne desselben die durch den Mittelpunkt des Kreises geht. (§. 351) (1 Def. 17).

Tab.II. In fig. 28 ist die Sehne AB durch den Mittelpunkt C des Kreises gezogen werden, daher ist AB ein Durchmesser dieses Kreises.

§. 60.

Abschnitte eines Kreises sind die Theile der Kreisfläche worinnen die Sehne selbigen eintheilt. (§. 353) (III Def. 6).

Tab.II. Die Sehne AB fig. 27 theilet die Kreisfläche ACBD in zwey Theile ADB und ABC welche durch die Sehne AB und einen Theil ADB oder ACB der Kreislinie eingeschlossen werden, und Abschnitte des Kreises heissen.

§. 61.

§. 61.

Der gröſsere Abſchnitt iſt derjenige in welchem ſich der Mittelpunkt des Kreiſes findet. (§. 353).

Dergleichen iſt A C B fig. 27. Tab.II.

§. 62.

Der kleinere Abſchnitt iſt, in welchem der Mittelpunkt nicht anzutreffen iſt. (§. 353).

Ein ſolcher iſt A D B fig. 27. Tab.II.

§. 63.

Ein Ausſchnitt iſt ein Stück der Kreisfläche das zwiſchen zweyen Halbmeſſern und ein Stück der Kreislinie eingeſchloſſen iſt. (§. 353) (III Def. 10).

Wenn aus dem Mittelpunkte E fig. 29 Tab.II. zwey Halbmeſſer E A, E D gezogen werden, ſo ſchlieſsen ſelbige mit dem Bogen A D eine Figur A E D ein, welche ein Ausſchnitt genannt wird. Dergleichen ſind auch fig. 29. D E B, B E C, C E A.

§. 64.

Die Berührungslinie oder Tangente des Kreiſes heiſst eine grade Linie welche an den Kreis in einen Punkt ſtöſset, denſelben aber nicht ſchneidet, ſondern ganz auſſerhalb deſſelben fället. (§. 371) (III Def. 2).

Tab.II. Wenn fig. 30 die grade linie BD an den Kreis, dessen Mittelpunkt C ist, bey A stößet, übrigens aber denselben nicht schneidet, so ist BD eine Berührungslinie des Kreises dessen Mittelpunkt C ist.

§. 65.

Ein Winkel am Mittelpunkt ist, welchen zwey Halbmesser am Mittelpunkt mit einander einschließen.

Tab.II. Dergleichen ist fig. 29 AED den die Halbmesser AE, DE beym Mittelpunkte E einschließen. Von einem solchen Winkel sagt man er stehe auf den Bogen AD. Eben so sind DEB, BEC, CEA Winkel am Mittelpunkte die auf die Bogen DB, BC und CA stehen.

§. 66.

Ein Winkel am Umkreise ist, den zwo Sehnen die aus einem nehmlichen Punkte des Umkreises gezogen worden, an diesem Punkte mit einander einschließen.

Tab.II. Wenn fig. 31 die beyden Sehnen BA, BC aus dem nehmlichen Punkt B der Kreislinie gezogen worden, so wird der Winkel ABC ein Winkel am Umkreise genannt, und man sagt er stehe auf den Bogen AC welchen die Sehnen BA, BC vom Umkreise abschneiden. (III Def. 9).

§. 67.

§. 67.

Ein Winkel im Abschnitte ist, den zwo grade Linien aus einem nehmlichen Punkte des Kreisbogens nach den Endpunkten der Sehne des Abschnittes gezogen, miteinander einschließen. (III Def. 8).

Wenn ACB fig. 32 ein Abschnitt ist, der durch die Sehne AB und den Kreisbogen ACB begrenzt wird, und man zieht von einem willkührlichen Punkte C des Kreisbogens die graden Linien CA, CB nach den Endpunkten A und B der Sehne, so heißt der Winkel ACB ein Winkel im Abschnitte ACB. Tab. II.

§. 68.

Eine ordentliche Figur ist, eine ebene geradlinigte Figur deren Seiten alle einander gleich sind, und gleiche Winkel einschließen. (§. 384).

Wenn im Sechseck fig. 33 die Seiten AB, BC, CD, DE, EF, FA, und die Winkel ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB welche von diesem Seiten eingeschlossen werden, alle einander gleich sind, so ist die Figur ABCDEF eine ordentliche. Tab. II.

§. 69.

Eine Figur ist innerhalb eines Kreises beschrieben, wenn jeglicher Win-

Winkel der Figur in den Umkreis eines Kreises fällt. (IV Def 3).

Tab.II. Wenn in fig. 34 alle Winkel A, B, C, D, E der geradlinigten Figur ABCDE in die durch A, B, C, D, E gehende Kreislinie fallen, so sagt man die Figur ABCDE sey in den Kreis beschrieben worden.

§. 70.

Eine Figur ist um einen Kreis beschrieben wenn jegliche Seite der Figur die Kreislinie berühret. (IV Def. 4).

Tab.II. Wenn fig. 35 die Seiten AD, DC, CB, BA der Figur ABCD die Kreislinie deren Mittelpunkt E ist, in F, G, H, K berühren, so sagt man die Figur ABCD sey um den Kreis beschrieben worden.

§. 71.

Ein Verhältniß ist eine gewisse Beziehung welche zwo gleichartige Größen, nach einem beliebigen Maaße gegeneinander haben. (V Def. 3).

Tab.II. Wenn man entdecken will, welches Verhältniß zwo gegebene Linien ab, cd fig. 36 geneinander haben, so nehme man eine andere grade linie ef, wo möglich, so an, daß sich die beyden ab, cd aus derselben genau zusammensetzen lassen, indem man ef öfters wiederholt, uud bemerke wie oft dies bey ab und bey cd geschehen müsse, so hat man einen bestimmten

Be=

Begrif von dem Verhältnisse der beyden Linien ab, cd. Findet sich z. B. daß ab gleich ist an 2 ef und cd gleich an 3 ef, so hat man einen Begrif von der Beziehung der Linien ab, cd auf einander, oder von dem Verhältnisse ab zu cd welches hier wie 2 zu 3 seyn würde. Die angenommene Linie ef ist alsdenn ein gemeinschaftliches Maaß der beyden andern ab und cd.

Haben aber zwo Größen, dergleichen die graden Linien ab, cd sind, kein gemeinschaftliches Maaß ef, so klein auch dieses angenommen werden mag, so kann man auch keinen ganz vollständigen Begrif von dem Verhältniß der ab zur cd erhalten. Indessen da man immer ef so wählen kann daß sich daraus eine von beyden Linien ab oder cd zusammensetzen lasse, indem ef einem gewissen Theil von ab oder cd gleich genommen wird, so kann man immer mit diesem angenommenen Theil ef die andere Linie so genau ausmessen, daß der Fehler weniger als ein solches Theilchen ef beträgt, und man erhält einen desto vollständigern Begrif von dem Verhältniß der beyden Linien ab, cd je kleiner ef ist, oder in je mehrere Theile eine der Linien ab oder cd ist zerfällt worden, um die andere aus solchen Theilchen so genau zusammen zu setzen, daß der Fehler unmerklich werde. Hätte man z. B. ef gleich $\frac{1}{10}$ cd genommen, so müßte ef, auch 10 mahl genommen werden, um cd zu erhalten; fände man nun daß wenn ef 6 mahl

genommen worden, von ab weniger als ef übrig bliebe, so könnte man sagen: ab verhalte sich zu cd sehr nahe wie 6 ef zu 10 ef oder wie 6 zu 10. Hier beträgt nehmlich der Fehler weniger als ein ef gleich $\frac{1}{10}$ cd.

Will man daher einen noch vollständigern Begrif von diesem Verhältniß haben, so nehme man ef gleich $\frac{1}{100}$ cd so muß ef hier 100 mahl genommen werden um cd zu erhalten, setzt man nun, daß wenn ef 66 mahl auf ab getragen worden weniger als ef übrig bleibt, so kann man sagen: ab verhalte sich zu cd sehr nahe wie 66 ef: 100 ef oder wie 66 zu 100, und der Fehler beträgt hier weniger als ef $=$ $\frac{1}{100}$ cd welcher, da $\frac{1}{100}$ zehen mahl kleiner ist als $\frac{1}{10}$, hier 10 mahl geringer als im vorigen Fall ist, folglich ist auch das Verhältniß 66 zu 100 viel richtiger als das erste 6 zu 10.

Auf diese Art kann man also das Verhältniß zwoer Größen immer genauer angeben, ohne je, wenn die Größen kein gemeines Maas haben, die letzte Genauigkeit erreichen zu können.

Die Bezeichnung eines Verhältnisses geschiehet auf folgende Art ab : cd. Man setzet nehmlich zwischen beyde Glieder eines Verhältnisses zwo Punkte, sodann heißt das erste Glied das **Vorderglied**, das zweyte aber das **Hinterglied** des Verhältnisses.

§. 72.

Gleichnamigte Glieder sind entweder lauter Vorderglieder oder Hinterglieder mehrerer Verhältnisse. (V Def 12).

Wenn a:b, c:d, e:f, g:h mehrere Verhältnisse bezeichnen, so heißen a, c, e, g sowohl als b, d, f, h gleichnamigte Glieder weil erstere lauter Vorderglieder, letztere aber lauter Hinterglieder der Verhältnisse sind.

§. 73.

Ein gröſseres Verhältniß ist von zween Verhältnissen dasjenige dessen Vorderglied aus mehrern Theilen seines Hintergliedes besteht. (V Def. 7).

Will man daher untersuchen welches von zween Verhältnissen a:b und c:d das größte sey, so theile man die Hinterglieder b und d beyder Verhältnisse in eine beliebige Anzahl gleicher Theile. Findet sich alsdenn daß a aus mehr Theile von b als c aus Theilen von d besteht so folgt daß das erste Verhältniß a : b gröſser sey als das andere c:d welches man wie bekannt durch a:b > c:d zu bezeichnen pflegt. Will man zum Beyspiel wissen welches von zween Verhältnissen 16:57 und 38:131 das größte ist, so theile man die Hinterglieder 57 und 131 in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zum Beyspiel hier in 1000 so ist ein Theil von 57 als dem Hintergliede des ersten Verhältnisses $\frac{57}{1000}$.

Nimmt

Nimmt man daher diesen Theil 1000 mahl so entsteht das Hinterglied 57, wird hingegen eben dieser Theil 280 mahl genommen, so kommt 15 $\frac{96}{100}$ heraus, welches 16 so nahe giebt daß der Fehler nur $\frac{4}{100}$ oder $\frac{40}{1000}$ also weniger als $\frac{57}{1000}$ beträgt. Man kann daher sagen daß das Vorderglied 16 des ersten Verhältnisses 16:57 aus etwas über 280 Tausendtheile des Hintergliedes 57 zusammengesetzt sey. Eben so verfahre man bey dem zweyten Verhältniße, so ergiebt sich: daß das Vorderglied 38 aus etwas über 290 Tausendtheile seines Hintergliedes 131 besteht. Da demnach 38 aus mehrern Theilen von 131 als 16 aus gleich vielen Theilen von 57 besteht, so ist auch das Verhältniß 38:131 von den beyden 38:131 und 16:57 das größere.

§. 74.

Eine Verhältnißgleichung (Proportio) **ist die Uebereinstimmung oder Gleichheit zweer Verhältnisse.** (V Def. 8).

Will man daher vollkommen erweisen daß zwey Verhältnisse eine Verhältnißgleichung machen, so muß man darthun, daß keines von beyden Verhältnissen größer als das andere ist, folglich daß keine Ungleichheit statt finde, so klein auch immer die Theile der Glieder beyder Verhältnisse angenommen werden mögen.

Soll man z. B. erweisen daß die vier Linien A, B, C, und D eine Verhältnißgleichung machen,

chen, so muß man zeigen daß nachdem B und D in eine gleiche Anzahl Theile sind zerfällt worden: A aus eben so vielen Theilen von B, als C aus vielen Theilen von D, entweder ganz genau, oder doch mit einem so geringen Fehler zusammengesetzt werden könne, daß der Unterschied bey A weniger als ein Theilchen von B, bey C aber weniger als ein Theilchen von D ausmache, und daß dieses nicht nur für eine bestimmte Anzahl der Theile von B und D, sondern überhaupt für jede Anzahl, so groß man sie auch immer nehme, gelte.

§. 75.

Ein zusammengesetztes Verhältniß ist, dessen Vorderglied dem Vordergliede des ersten, dessen Hinterglied aber dem Hintergliede des letzten mehrerer andern Verhältnissen gleich ist, welche Verhältnisse die Eigenschaft haben, daß das Hinterglied eines jeden Verhältnisses dem Vordergliede des unmittelbar darauf folgenden gleich ist.

Wenn zwey Verhältnisse a:b und b:c, wo das Hinterglied b des ersten dem Vordergliede b des zweyten gleich ist, gegeben sind, so sagt man: das Verhältniß des Vorderglledes a des ersten Verhältnisses a:b zum Hintergliede c des letzten Verhältnisses b:c sey aus den beyden Verhältnissen a:b und b:c zusammengesetzt.

Eben so, wenn a : b
b : c
c : d
d : e
u. s. w.
mehrere dergleichen Verhältnisse bezeichnen, worinnen das Hinterglied eines jeden dem Vordergliede des darauf folgenden Verhältnisses gleich ist, so sagt man: das Verhältniß a : c sey aus den zween a : b und b : c zusammengesetzt; das Verhältniß a : d aber aus den dreyen a : b, b : c und c : d, und das Verhältniß a : e aus den vieren a : b, b : c, c : d, d : e und so kann man weiter gehn, wenn noch mehr dergleichen Verhältnisse gegeben sind.

Ist daher a : b = 1 : 2
b : c = 3 : 4
c : d = 5 : 7
d : e = 8 : 11
u. s. w.

so kann man sagen a : c sey aus den Verhältnissen a : b und b : c oder auch aus den Verhältnissen 1 : 2 und 3 : 4 zusammengesetzt; eben so kann man sprechen das Verhältniß a : d sey aus den Verhältnissen a : b, b : c, und c : d, oder aus den Verhältnissen 1 : 2, 3 : 4, 5 : 7, die den vorigen gleich sind, zusammengesetzt. Hierdurch begreift man daß das Verhältniß a : e aus den Verhältnissen 1 : 2, 3 : 4, 5 : 7 und 8 : 11 zusammengesetzt seyn wird. Dieses pflegt man aber folgendermaßen zu bezeichnen.

e : a

$$a : e = \left\{\begin{matrix} a:b \\ b:c \\ c:d \\ d:e \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1:2 \\ 3:4 \\ 5:7 \\ 8:11 \end{matrix}\right\}$$

§. 76.

Ein zweymal höheres Verhältniß ist, das aus zween gleichen Verhältnissen, welche als einfach betrachtet werden, zusammengesetzt ist.

Wenn $a : b = n : m$ und

$b : c = n : m$

so heißt das Verhältniß $a : c$ welches aus den zween $a : b, b : c$ oder aus den zween einander gleichen Verhältnissen $n : m$ und $n : m$ zusammengesetzt ist, zweymal so hoch als eines der Verhältnisse $n : m$ woraus es ist zusammengesetzt worden, und welche als einfach betrachtet werden.

Da es hierbey bloß darauf ankömmt welches Verhältniß man als einfach betrachtet, so erhellet daß man auch umgekehrt sagen kann: daß Verhöltniß $n : m$ sey **zweymal so niedrig** als das Verhältniß $a : c$ wenn man dies letztere als einfach annimmt.

Es ist auch leicht zu begreifen was ein dreymal, viermal, fünfmal u. s. w. höheres, und ein dreymal, viermal, fünfmal u. s. w. niedrigeres Verhältniß sagen will.

Wenn

Wenn nehmlich a : b = 7 : 11
b : c = 7 : 11
c : d = 7 : 11
d : e = 7 : 11
e : f = 7 : 11

so heißt a : c ein zweymal höheres Verhältniß als 7 : 11, a : d ein dreymal höheres Verhältniß als 7 : 11, a : e ein viermal höheres Verhältniß als 7 : 11; und a : f ein fünfmal höheres Verhältniß als 7 : 11. Umgekehrt kann man auch 7 : 11 ein zweymal so niedriges Verhältniß als a : c; 7 : 11 ein dreymal so niedriges Verhältniß als a : d; 7 : 11 ein viermal so niedriges Verhältniß als a : e; und 7 : 11 ein fünfmal so niedriges Verhältniß als a : f nennen.

Wenn alles bleibt wie wir es hier angenommen haben, so sagt man auch a, b, c, d, e, f machen eine stetige Verhältnißgleichung (Progressio) woraus demnach folgt daß eine stetige Verhältnißgleichung aus jede beliebige Anzahl Glieder bestehen könne, und durch

a : b : c : d : e : f u. s. w. bezeichnet werden kann.

Es wird daher in einer stetigen Verhältnißgleichung von dreyen Gliedern das erste Glied zum dritten ein zweymal höheres Verhältniß als zum zweyten Gliede, und in einer stetigen Verhältnißgleichung von vier Gliedern, das erste zum vierten ein dreymal höheres Verhältniß als zum zweyten Gliede, und so ferner jedesmal um eins höher haben. (V Def. 10 11).

§. 77.

§. 77.

Aehnliche geradlinigte Figuren sind, bey denen die einzeln **Winkel** in eben der **Ordnung** gleich, und diejenigen **Seiten**, welche gleiche **Winkel** einschließen, eine **Verhältnißgleichung** machen. (VI Def. 1) (§. 413.)

Es seyn fig. 38. 39 zwo geradliniate Figuren ABCDE und abcde, so sind dieselben ähnlich wenn A = a, B = b, C = c, D = d, E = e, und überdem AB : BC = ab : bc; BC : CD = bc : cd; CD : DE = cd : de; DE : EA = de : ea. Tab. II.

Aus dieser Erklärung folgt daß alle ordentliche Figuren §. 68, welche eine gleiche Anzahl Seiten haben, einander ähnlich sind. Folglich sind alle gleichseitige Dreyecke §. 41 alle ordentliche Vierecke §. 53 und alle ordentliche Vielecke §. 57 von gleich vielen Seiten, ähnliche Figuren.

§. 78.

Die Lage einer Ebene §. 14 **wird bestimmt, wenn drey Punkte gegeben werden, durch welche die Ebene gehn soll.** (§. 497).

Um eine Ebene durch drey gegebene Punkte zu legen nehme man einen der dreyen Punkte beliebig an, und lege durch denselben die Ebene; so ist klar daß man dieselbe um diesen

Punkt uach allen Seiten drehen könne; ohne daß sie von ihm abweiche; man drehe sie daher so lange bis daß der andere Punkt auch in die Ebene falle, so wird sich diese Ebene ohne von den beyden Punkten abzuweichen, nur noch bloß um die grade Linie, die beyde Punkte vereiniget, als um eine Axe, drehen lassen, man drehe sie daher, bis daß der dritte gegebene Punkt auch in die Ebene fällt, so erhält dieselbe dadurch ihre bestimmte Lage.

§. 79.

Eine grade Linie ist einer Ebene gleichlaufend, wenn sie so sehr sie auch verlängert werden mag, die nach allen Seiten ohne Grenzen ausgedehnte Ebene niemahls erreichet. (§. 503).

Tab.II. Wenn fig. 40 die Linie AB gegen die Ebene CDEF so liegt, daß, man mag auch AB von A gegen B oder von B gegen A so weit verlängern als man will, und die Ebene CDEF nach allen Seiten so weit als gefällig ausdehnen, die verlängerte Linie die erweiterte Ebene nie erreicht, so sagt man AB sey mit der Ebene CDEF gleichlaufend.

§. 80.

Eine grade Linie steht auf einer Ebene senkrecht wenn sie in dem Punkte wo sie die Ebene trift, mit allen durch diesen Punkt, in der Ebene gezo-

gene

gene Linien rechte Winkel einschließt. (X Def. 3) (§. 506).

Wenn fig. 41 AB die Ebene FG in B trift, und mit allen in der Ebene FG durch den Punkt B gezogenen graden Linien EB, BD, BC in B rechte Winkel EBA, ABD, ABC einschließt, so steht AB auf die Ebene FG senkrecht. Tab. II.

§. 81.

Die Neigung zwoer Ebenen gegeneinander ist der Winkel den zwo grade Linien einschließen davon eine in der ersten, die andere aber in der zwoten Ebene auf einen und eben demselben Punkte des gemeinschaftlichen Durchschnitts beyder Ebenen senkrecht stehn. (X Def. 6) (§. 511).

Wenn fig. 42 AB, AC zwo Ebenen sind die sich einander in der Linie AD schneiden, und man wählt in diesem Durchschnitt AD einen beliebigen Punkt F, errichtet in diesem Punkt die Linie FE in der Ebene AB, die Linie FG aber in der andern Ebene AC, auf den Durchschnitt AD senkrecht, so bestimmet der Winkel EFG die Neigung beyder Ebenen AB, AC gegeneinander. Tab. II.

§. 82.

Ebenen sind gleichlaufend, wenn sie, nach allen Seiten erweitert, ein-

einander nirgends erreichen. (X Def. 8) (§. 518).

Tab.II. Wenn AB, CD fig. 43 zwo Ebenen sind die, man mag sie auch erweitern wie man will, einander nirgends erreichen, so ist die Ebene AB mit der Ebene CD gleichlaufend.

§. 83.

Eine eckigte Säule (Prisma) **ist ein** Körper der zwo gegenüberliegende Oberflächen hat, die einander gleich, ähnlich, und gleichlaufend sind, und dessen übrige Oberflächen alle aus gleichgestreckten Vierecken bestehen. (X Def. 13) (§. 525).

Tab.II. Einen dergleichen Körper stellt fig. 44 vor, bey welchem die Flächen ABCDE, FGHIK einander gleich, ähnlich und gleichlaufend sind; die übrigen Oberflächen AG, BH, CI, DK, EF, aber aus gleichgestreckten Vierecken §. 51, bestehen.

Anmerkung. Die beyden gleiche, ähnliche und gleichlaufende Oberflächen der eckigten Säule werden die **Grundflächen**, die übrigen aber **Seitenflächen** derselben genannt. Man pflegt eine eckigte Säule auch nach den Ecken der Grundflächen zu benennen, daher giebt es drey, vier, fünf ꝛc. eckigte Säulen, wenn die Grundflächen Drey, Vier, Fünfecke u. s. w. sind.

§. 84.

§. 84.

Eine schiefe eckigte Säule ist diejenige, deren Seitenflächen gleichgestreckte schiefe Vierecke sind.

Wenn fig. 44 die gleichgestreckten Vierecke AG, BH, CI, DK, EF, schiefwinklicht sind, so heißt der Körper ACHF eine schiefe eckigte Säule. Tab. II.

§. 85.

Eine gerade eckigte Säule ist, deren Seitenflächen alle Rechtecke sind.

So würde fig. 44 der Körper ACHF eine gerade eckigte Säule heißen, wenn AG, BH, CI, DK, EF alle, Rechtecke wären. Tab. II.

§. 86.

Ein gleichgestreckter Pfeiler (Parallelepipedum) **ist eine eckigte Säule, deren Grundflächen gleichgestreckte Vierecke sind.** (§. 530).

Einen dergleichen Körper stellt die 45te Figur vor, in welcher die Grundflächen ABCD, EFGH gleichgestreckte Vierecke sind. Tab. II.

Anmerkung. Hieraus ist klar daß ein jeder gleichgestreckter Pfeiler von sechs gleichgestreckten Vierecken eingeschloßen seyn müße.

§. 87.

Ein gleichgestreckter rechtwinklicher

lichter Pfeiler ist, dessen Grund- und Seitenflächen Rechtecke §. 52 sind.

Tab. II. Wenn man sich die Grundflächen ABCD, EFGH, und die Seitenflächen AF, BG, CH, DE, fig 45 als Rechtecke vorstellt, so ist Körper ACGE ein gleichgestreckter rechtwinklichter Pfeiler.

Anmerkung. Ein gleichgestreckter rechtwinklichter Pfeiler wird folglich von sechs Rechtecken eingeschlossen.

§. 88.

Ein Würfel ist ein gleichgestreckter grader Pfeiler dessen Grund- und Seitenflächen alle ordentliche einander gleiche Vierecke §. 53 sind. (XI Def. 25) (§. 533).

Tab. II. Wenn fig. 46 die Grundflächen ABCD, EFGH, sowohl als die Seitenflächen ABGH, AHED, DEFC, CFGB alle, gleiche und ordentliche Vierecke sind, so wird der von diesen Oberflächen eingeschlossene Körper ein Würfel genannt.

§. 89.

Eine runde Säule (Cylindrus) ist ein Körper der von zween gleichen und gleichlaufenden Kreisen als Grundflächen und von einer krummen Oberfläche eingeschlossen wird, welche krumme Oberfläche die Eigenschaft haben muß, daß eine jede grade Linie von dem Umkreise der einen Grundfläche, mit derjenigen graden Linie, welche die Mittelpunkte bey-

beyder Grundflächen verbindet, gleichlaufend gezogen, nicht nur ganz in die krumme Oberfläche falle, sondern auch die andere Grundfläche in ihrem Umkreise schneide. (XI Def. 21) (§. 534).

Wenn fig. 47 CF, DE zwey gleiche und Tab. II. gleichlaufende Kreise sind, deren Mittelpunkte A und B; und man legt, um die Umkreise beyder Grundflächen CF, DE eine krumme Oberfläche von der Beschaffenheit daß jede durch einen Punkt D, E, F, C mit AB gleichlaufend gezogene grade linie CD oder EF ganz in die krumme Oberfläche fällt, und verlängert die andere Grundfläche in einem Punkt ihres Umkreises antrift, so heißt der von beyden Kreisen und der krummen Oberfläche eingeschlossene Körper eine runde Säule. Man nennet ihn auch zuweilen schlechtweg eine Säule auch öfters eine Walze.

§. 90.

Die Axe der runden Säule ist, die grade Linie welche die Mittelpunkte der beyden Grundflächen miteinander verbindet. (XI. Def. 22) (§. 535).

In der 47sten Figur ist AB diese Axe. Tab. II.

§. 91.

Eine gerade runde Säule ist, deren Axe auf den Grundflächen senkrecht

steht. Alle übrigen werden schiefe runde Säulen genannt.

Tab.II Wenn man in der 47ten Figur sich AB auf der Grundfläche DE oder auf der andern CF senkrecht vorstellt, so ist die runde Säule CFED eine gerade.

§. 92.

Eine Spitzsäule (Pyramis) **ist ein Körper der zwischen Oberflächen so eingeschlossen ist, daß, von einer derselben an, alle übrige in einen Punkt zusammenlaufen.** (XI Def. 12) (§. 555).

Tab.II. Wenn in der 48ten Figur von der Fläche ABCDEFG an, eben so viele Dreyecke ABC, ACD, ADE, AEF, AFG und AGB in einem Punkt A zusammenlaufen als die Figur Seiten hat, so heißt der von allen Oberflächen eingeschlossene Körper eine Spitzsäule.

Anmerkung. Die Fläche BCDEFG wird die **Grundfläche**, der Punkt A die **Spitze**, die übrigen Oberflächen der Spitzsäule aber **Seitenflächen** derselben genannt. Und da die Zahl der Seitenflächen einerley ist, mit der Zahl der Seiten der Grundfläche, so unterscheidet man die Spitzsäulen in **dreyseitige, vierseitige, fünfseitige u. s. w.**

§. 93.

§. 93.

Ein Kegel ist ein Körper der von einem Kreise, und einer krummen Oberfläche eingeschlossen wird; welche krumme Oberfläche die Eigenschaft hat, daß alle, von einem ausser der Ebene des Kreises liegenden Punkte, nach jedem Punkte der Kreislinie gezogene, grade Linien, ganz in die krumme Oberfläche fallen. (XI Def. 18) (§. 557).

Wenn CD fig. 49 einen Kreis, CBD aber eine krumme Oberfläche vorstellt, in welche alle grade Linien fallen die von dem Punkte B, an die der Kreisfläche CD begrenzenden Kreislinie gezogen werden können, so heißt der eingeschlossene Raum ein **Kegel.** Tab. II.

Anmerkung. Auch hier wird der Kreis CD die **Grundfläche**, der Punkt B aber, wo alle in der krummen Oberfläche CBD vom Umkreise der Kreisfläche CD gezogene grade Linien zusammentreffen, die **Spitze** des Kegels genannt.

§. 94.

Die Axe des Kegels ist, die grade Linie welche die Spitze des Kegels mit dem Mittelpunkt seiner Grundfläche verbindet. (XI Def. 19).

Dergleichen ist fig. 49 die grade Linie AB. Tab. II.

§. 95.

Ein grader Regel ist, dessen Axe auf die Grundfläche senkrecht steht; alle übrige sind schiefe Regel.

Tab.II. Wenn man sich fig. 49 die Linie AB auf die Kreisfläche CD senkrecht vorstellt, so ist der Kegel CBD ein gerader.

§. 96.

Eine Kugel ist ein Körper der von einer einzigen krummen Oberfläche eingeschlossen wird, welche sich durch den Umkreis eines Halbkreises erzeuget, indem man denselben so lange um seinen Durchmesser dreht bis er wieder dorthin gelanget, wo man ihn zu drehen angefangen hatte. (XI Def. 14) (§. 571).

Tab.II. Wenn man sich vorstellt der Halbkreis ADBCA fig. 50 werde so lange um seinen Durchmesser AB gedrehet bis er wiederum dahin kommt, wo er sich zu bewegen angefangen hat, so wird dieser Halbkreis während seiner Bewegung einen Raum beschreiben, den wir eine Kugel nennen, der Umkreis ADB desselben aber eine krumme Oberfläche die die Kugel begrenzet.

§. 97.

Die Axe der Kugel ist der Durchmesser desjenigen Kreises durch dessen Um=

Umdrehung die Kugel entsteht. (XI Def. 15).

In fig. 50 ist demnach AB die Axe einer Kugel welche durch die Umdrehung des Halbkreises ADBCA entstehn würde. Tab.II.

§. 98.

Der Mittelpunkt der Kugel ist der Mittelpunkt desjenigen Halbkreises durch dessen Umdrehung die Kugel entsteht. (XI Def. 16).

In fig. 50 würde demnach der Punkt C zugleich des Halbkreises und der Kugel Mittelpunkt seyn. Tab.II.

§. 99.

Aehnliche Körper sind, welche von einer gleichen Anzahl ähnlicher Oberflächen eingeschlossen werden. (XI Def. 9).

Wenn die eckigten Säulen fig. 44 und 51 von einer gleichen Anzahl, wie hier von sieben, Oberflächen eingeschlossen werden, davon auch diejenigen die in beyden Figuren mit gleichen Buchstaben bezeichnet sind, einander ähnlich angenommen werden, so sagt man die beyde eckigte Säulen ACHF, achf seyn ähnliche Körper. Eben dieses ist auch von gleichgestreckten Pfeilern und Spitzsäulen zu verstehen, woraus klar ist, daß zwo verschiedene Würfel jederzeit ähnliche Körper sind. Tab.II.

§. 100.

§. 100.

Aehnliche runde Säulen, und ähnliche Kegel sind deren Axen sich eben so wie die Durchmesser ihrer Grundflächen verhalten, und gegen die Grundflächen gleiche Neigung haben. (XI Def. 24).

Tab. II. Wenn die Durchmesser CF, cf oder DE, de der runden Säulen fig. 47. 52 sich eben so wie die Axen AB, ab verhalten, daß will sagen wenn die Verhältnißgleichung CF : cf = AB : ab oder welches gleich DE : de = AB : ab statt findet, und die Neigung der Axe AB gegen die Grundfläche DE ist gleich der Neigung der Axe ab gegen die Grundfläche de, so sind beyde Kärper ähnlich. Dieses ist eben so von Kegeln zu verstehen.

Grundwahrheiten der Meßkunst.

§. 101.

Zwischen jegliche zween Punkte fällt eine einzige grade Linie §. 10 und diese ist unter allen möglichen Linien, die zwischen eben den zween Punkten gezogen werden können, die allerkürzeste. (§. 250).

Tab. I. Die grade linie AB fig. 1 welche die zween Punkte A, B miteinander verbindet, ist die allerkürzeste von allen gebrochenen, und krummen

Linien

Linien, die wie fig. 2. 3 und 4 von A bis B gezogen worden.

§. 102.

Alle grade Linien, welche gleich sind, fallen zusammen, oder decken einander. (§. 251).

Wenn in fig. 1 zwischen den Punkten A und B noch eine andere als die in der Figur gezogene Linie A B gelegt wird, so wird sie mit selbiger zusammenfallen, und sie decken. Tab. I.

§. 103.

Zwo grade Linien können einander nur in einem einzigen Punkte nicht aber in mehreren Punkten schneiden. (§. 253).

Die zwo grade Linien A B, B C fig. 6 n° 1. können einander nur in dem einzigen Punkte B schneiden, man mag sie auch so weit verlängern als man will. Tab. I.

§. 104.

Die Größe eines Winkels §. 16. 17. 18 hängt nicht von der Größe seiner Schenkel §. 19 sondern bloß von der Neigung derselben ab. (§. 258).

Die Größe des Winkels A B C fig. 6 n° 1. bleibt unverändert eben dieselbe, man mag auch die Schenkel B A, B C des Winkels A B C so weit verlängern als man will. Tab. I.

§. 105.

§. 105.

Zwey Winkel sind sich gleich wenn sie einander decken das will sagen: wenn die Spitzen §. 20 beyder Winkel, sowohl als ihre Schenkel, zusammenfallen. Zwey Winkel sind hingegen ungleich, wenn, nachdem beyder Winkel Spitzen, sowohl als ein Schenkel beyder Winkel aufeinander gelegt worden, der andere Schenkel des einen Winkels entweder zwischen den Schenkeln des andern Winkels fällt, oder auch ausserhalb beyder Schenkeln des letzten Winkels angetroffen wird. (§. 259. 260).

Tab III. Von der Gleichheit zweyer Winkel geben fig. 53. 54 ein Beyspiel; denn wenn man die Spitze b des einen auf die Spitze B des andern Winkels so legt, daß der Schenkel b a mit dem Schenkel B A zusammenfällt, so trift auch der andere Schenkel b c des einen Winkels mit dem andern Schenkel B C des andern zusammen, und beyde Winkel decken sich. Die beyden Winkel a b c, A B C fig 54. 55 hingegen sind ungleich, denn wenn man die Spitze b des ersten so auf die Spitze B des andern legt, daß der Schenkel b c den Schenkel B C decket, so wird der zweyte Schenkel b a des ersten Winkels zwischen den Schenkeln A B, B C des zweyten Winkel in die lage von B D zu liegen kommen; woraus zugleich erhellet daß der Winkel a b c kleiner seyn

muß

muß als ABC, indem ersterer nur einen Theil DBC des letzteren decket. Würde aber umgekehrt der Winkel ABC so auf den Winkel abc gelegt, daß B mit b und BC mit bc zusammenträfe, so würde der andere Schenkel BA des ersten Winkels ausserhalb den beyden Schenkeln ab, bc des zweyten Winkels fallen, und dies wäre ein Kennzeichen daß ABC größer als abc ist, indem ersterer mehr als den letzten Winkel decken könnte.

§. 106.

Wenn von einem beliebigen Punkte nach einer graden Linie zwo andere grade Linien gezogen werden, so entstehen Winkel, davon zwey und zwey nach einer nehmlichen Seite gerichtet sind, und in jedem Paare ist der äussere größer als der innere. (§. 262).

Wenn fig. 56 von dem Punkte C nach der graden Linie AB zwo grade Linien CD, CE gezogen worden, so entstehen die vier Winkel ADC, AEC, CDB, CEB davon die beyden ersten nach der einen, die beyden letzten aber nach der andern Seite mit ihren Oefnungen gerichtet sind; und im ersten Paare ist der äussere ADC größer als der innere AEC; eben so ist im letzten Paare der äussere CEB auch größer als der innere CDB. Tab. III.

§. 107.

§. 107.

Zwo grade Linien die von zween Punkten einer Linie sind gezogen worden, machen mit derselben vier Winkel, davon zwey und zwey nach eben der Seite gerichtet sind. Haben nun beyde Linien gegen die dritte eine solche Lage, daß die äussern Winkel größer als die nach eben den Seiten gerichteten innern Winkel sind, so müssen sich die beyden Linien durchschneiden, wenn man sie nur genugsam verlängert. (§. 263).

Tab. III. Wenn fig. 56 von den zween Puncten D, E der graden linie AB zwo grade linien DC, EC gezogen werden, sp entstehen die vier Winkel ADC, AEC, CDB, CEB davon das erste Paar mit den Oefnungen gegen die eine, das andere aber gegen die andere Seite gerichtet ist. Sind nun diese linien DC, EC gegen AB so gezogen daß der äussere Winkel ADC größer als der innere Winkel AEC, so mit seiner Oefnung gegen eben die Seite als der äussere gerichtet ist, oder daß der äussere CEB größer als der innere nach eben der Seite gerichtete Winkel CDB ist, so müssen die beyden graden linien DC, EC wenn sie genugsam verlängert werden, einander irgendwo in C schneiden.

§. 108.

Alle rechte Winkel §. 23 sind einander gleich; ein jeder anderer Winkel aber

der

der kein rechter ist, ist auch einem rechten Winkel ungleich. (§. 265).

Wenn man in zween Punkten C und D einer graden linie EF fig. 57 zwo grade linien CA, DB, auf EF senkrecht errichtet so werden die hierdurch entstehende rechte Winkel ECA, ACD, EDB, BDF sämmtlich einander gleich. Tab. III.

Anmerkung. Da alle rechte Winkel einander gleich sind, so ist auch der rechte Winkel am geschicktesten die übrigen damit zu vergleichen. Da man ihn nun öfters gebraucht um andere Winkel dadurch auszudrücken, so pflegt man ihn der Kürze wegen mit R, die Summe zweyer rechten Winkel mit 2 R, die Summe vier rechter Winkel mit 4 R, und so die übrigen zu bezeichnen.

§. 109.

Zwo grade Linien die auf einer dritten senkrecht stehen, können einander nicht schneiden, man mag sie auch so weit verlängern als man will. (§. 266).

So können die graden linien AC, BD fig. 57, die beyde der EF senkrecht sind, einander nicht schneiden, man mag sie auch so weit verlängern als man will. Tab. III.

§. 110.

Die Summe zweener Nebenwinkel §. 21, welche entstehn, indem eine grade Li-

nie schief gegen eine andere fällt §. 24, ist zween rechten Winkeln gleich. (§. 269) (1 Prop. 13).

Tab. I. So beträgt in fig. 9 die Summe der beyden Nebenwinkel ADC, CDB, welche die schief gegen AB gezogene Linie CD mit derselben bildet, zween rechte Winkel; welches man kurz so anzeigen kann, ADC + CDB = 2 R.

§. 111.

Die Summe aller Winkel welche in einer Ebene um einen Punkt gelegt werden können, beträgt vier rechte Winkel. (§. 273).

Tab. III. So beträgt die Summe aller um A fig. 58 liegender Winkel BAC, CAD, DAE, EAF, FAB vier rechte; oder es ist BAC + CAD, DAE + EAF + FAB = 4 R.

§. 112.

Wenn zwo grade Linien von einer dritten geschnitten werden, und die äussern Winkel sind den nach eben der Seite gerichteten innern ungleich, so schneiden sich beyde grade Linien, wenn man sie nur gehörig verlängert. (§. 274).

Tab. III. Wenn in fig. 59 AB, CD von EF so geschnitten werden, daß die Winkel AGE, CHE oder AGF, CHF oder EGB, EHD oder endlich FGB, FHD ungleich werden, davon je zwey und zwey gegen eben die Seite gerichtet

sind, und auf der nehmlichen Seite von EF liegen, so müssen AB, CD zusammenlaufen, wenn sie nur genug verlängert werden.

§. 113.

Wenn sich zwo in einer Ebene gezogene grade Linien schneiden, und man zieht nach Willkühr eine dritte Linie in derselben Ebene, so muß sie wenigstens eine der beyden graden Linien schneiden, wenn man diese drey Linien nur gehörig verlängert. (§. 275).

Wenn fig. 60 AB, CD sich in E schneiden, Tab. III. und man zieht die Linie FG willkührlich in derselben Ebene worinnen AB, CD liegen, so wird sie wenigstens eine von den beyden Linien AB, CD erreichen oder schneiden, wenn man sie nur alle drey so weit als nöthig verlängert.

§. 114.

Zwey Scheitelwinkel §. 29 sind einander gleich. (§. 276) (1 Prop. 15).

So sind fig. 11 die Winkel AED, CEB Tab. I. oder AEC und DEB einander gleich, da jedes Paar zwey Scheitelwinkel enthält.

§. 115.

Zwo grade Linien die auf einer dritten senkrecht stehn, sind gleichlaufend, §. 30. (§. 278).

Tab.III. So sind fig. 57 die Linien AC, BD, weil sie beyde auf EF senkrecht stehn, gleichlaufend.

§. 116.

Wenn zwo in einer Ebene gezogene grade Linien von einer dritten geschnitten werden, und es ist einer der äussern Winkel dem innern nach eben der Seite gerichteten gleich, so sind die beyde Linien gleichlaufend. (§. 279) (1 Prop. 28).

Ta .III. Wenn fig. 61 AB, CD von EF in G und H geschnitten werden, und einer der äussern Winkel z. B. AGE ist dem nach eben der Seite gerichteten innern CHE gleich, so ist AB mit CD gleichlaufend.

§. 117.

Wenn zwo grade Linien von einer dritten geschnitten werden, und die daher entstehende Wechselwinkel §. 28 gleich sind, so sind beyde Linien gleichlaufend. (§. 280) (1 Prop. 27).

Tab.III. So sind fig. 61 AB, CD gleichlaufend, wenn die Linie EF beyde schnitt, und die Wechselwinkel AGH, GHD oder CHG, HGB, so hierdurch entstehen, einander gleich sind.

§. 118.

Wenn zwo grade Linien von einer dritten geschnitten werden, und die beyden

den innern Winkel, so hierdurch entstehen, und auf der nehmlichen Seite der schneidenden Linie liegen, zusammen zween rechten Winkeln gleich sind, so sind die Linien gleichlaufend. (§. 281) (1 Prop. 28).

Die linien AB, CD fig. 61 sind gleichlau- Tab. III.
fend wenn sie von EF geschnitten werden, und die innern Winkel so auf der nehmlichen Seite von EF liegen als AGH, GHC oder BGH, GHD zusammen zwey rechte Winkel betragen.

§. 119.

Wenn zwo grade Linien gleichlaufen, und durch eine dritte geschnitten werden, so sind 1° die hierdurch entstehende äussern Winkeln den innern nach eben der Seite gerichteten gleich. 2° Sind die Wechselwinkel in jedem Paare einander gleich. 3° Beträgt die Summe jeder zween auf der nehmlichen Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel zusammen zween rechte Winkel. (§. 282. 283. 284) (1 Prop. 29).

Werden die graden linien AB, CD fig. 61 Tab. III.
gleichlaufend angenommen, und willkührlich mit einer dritten EF geschnitten, so ist

1° AGE = CHE; EGB = EHD; FHC = FGA und FHD = FGB.

2° AGH = GHD und CHG = HGB.

3° AGH + GHC = 2R und BGH + GHD = 2R.

§. 120.

Wenn zwo grade Linien mit einer dritten gleichlaufend sind: so sind sie selbst gleichlaufend. (§. 285) (1 Prop. 30).

Tab. III. Wenn fig. 62 a mit c und b auch mit c gleichlaufen, so sind a und b selbsten gleichlaufend. Eben dieses läßt sich auch von mehreren graden Linien behaupten, welche in einer Ebene gezogen worden, und mit einer in derselben Ebene liegenden Linie gleichlaufen.

§. 121.

Eine jede ebene gradlinigte Figur hat wenigstens drey Seiten, ob sie gleich deren mehr, ja jede beliebige Anzahl derselben haben kann. (§. 295) (1 Axiom 11).

Tab. I. Denn weniger als drey grade Linien, als die beyde AB, BC fig. 6 n° 1, können keinen Raum einschließen, man mag sie auch verlängern wie man will, weil der Raum zwischen den Schenkeln §. 19 AB, BC des Winkels ABC unbegrenzt ist; will man nehmlich diesen Raum durch grade Linien begrenzen, so muß man von einem Punkt des Schenkels AB eine grade Linie nach einem Punkte des andern Schenkels BC ziehen, alsdenn aber entsteht ein Dreyeck §. 39 wie fig. 17 ABC. Man kann dieses aber nicht eben so von krummlinigten Figuren sagen, da man weiß daß bereits eine einzige krumme Linie wie fig. 14. 15 einen Raum begrenzen kann.

An=

Anmerkung. Aus dem zuletzt gesagten ist die Entstehungs-Art eines Dreyeckes begreiflich, und es ist klar daß man immer ein ungleichseitiges, gleichseitiges oder gleichschenklichtes Dreyeck §. 40 — 42 eben sowohl beschreiben könne, als ein rechtwinklichtes, stumpfwinklichtes oder spitzwinklichtes §. 45 — 47.

§. 122.

Wenn durch einen Punkt innerhalb einer Figur eine grade Linie gezogen, und genugsam verlängert wird, so muß diese den Umkreis der Figur §. 32 wenigstens in zween Punkten schneiden. Schneiden aber die Umkreise zwoer Figuren einander, so muß dieses zum wenigsten in zween Punkten geschehen. (§. 287).

Denn wenn man sich bey einer beliebigen Figur als fig. 13. 14. 15. 16 innerhalb derselben einen Punkt, und durch denselben eine grade Linie gezogen vorstellt, so wird diese wenigstens den Umkreis der Figuren in zween Punkten schneiden, wenn man sie nur gehörig verlängert. Woraus aber keinesweges folgt daß dies nur in zween Punkten möglich sey, weil der bloße Anblick der 16ten Figur schon zeiget, daß man in derselben eine grade Linie auch so ziehen könne daß sie verlängert den Umkreis dieser Figur in vier Punkten schneide, und bey andern Figuren ist dieses in noch mehreren Punkten möglich. Tab. I.

Tab.III. Von der Zerschneidung der Umkreise zwoer Figuren, wenigstens in zween Punkten, giebt fig. 63 ein Beyspiel; von der Zerschneidung in mehreren Punkten aber fig. 64. Wo in der ersten die beyden Kreislinien §. 35 sich in zween Punkten A und B, in der letztern aber die Umkreise der Figuren ABCDEFA und abcdea sich in nicht weniger als in zehen Punkten einander schneiden.

§. 123.

Alle Figuren §. 31 die einander decken oder mit ihren Grenzen zusammenfallen sind einander gleich, man kann aber nicht umgekehrt schliessen. (§. 288) (1 Axiom. 8).

Denn wenn man sich zwey Körper oder zwey Oberflächen vorstellt, die mit ihren Grenzen zusammen fallen, so sind beyde von einander, der Ausdehnung nach, nicht zu unterscheiden, und müssen daher einander sowohl gleich als ähnlich seyn. Man kann aber nicht Figuren, die nicht in eben den Grenzen passen, deswegen für ungleich halten, weil es zuweilen möglich ist, daß ein Stück, was auf einer Seite hervorsteht, auf der andern fehle.

§. 124.

Jede Figur die nicht durch eine einzige krumme Linie sondern durch mehrere Seiten §. 33 begrenzt wird, hat eben so viele Winkel als Seiten. (§. 289).

Tab.I. Die Figur ABCDEA fig. 13 hat fünf Win-

Winkel weil sie von eben so vielen Seiten eingeschlossen ist; eben so hat die 16te Figur A B C D E F G A sieben Winkel A, B, C, D, E, F, G weil sie von sieben Seiten eingeschlossen ist. Hieraus folgt daß eine dreyseitige Figur eben so viel als eine dreywinklichte, dreyeckigte oder kürzer als ein Dreyeck sagen will. Eben dieses ist so von den Benennungen der mehrseitigen oder mehreckigten Figuren zu verstehen.

§. 125.

Eine von den Seiten einer Figur muß, wenn sie eine grade Linie ist, kleiner als der übrige Theil des Umkreises seyn. (§. 289) (1 Prop. 20).

Es muß folglich schon eine Seite eines Tab. I. Dreyeckes A B C fig. 17, es sey welche es wolle, z. B. B C weniger betragen oder kleiner als die beyden andern Seiten A B, A C eben dieses Dreyeckes zusammengenommen seyn. Daß dieses aber um desto mehr bey Figuren von mehreren Seiten statt habe, ist für sich klar.

§. 126.

Die drey Winkel eines jeden Dreyeckes betragen zusammengenommen zween rechte Winkel. (§. 301) (1 Prop. 32).

So betragen die drey Winkel eines jeden Tab. I. der Dreyecke A B C fig. 17 — 21 zusammengenommen so viel als zwey rechte Winkel.

§. 127.

Wenn einer von den Winkeln eines Dreyeckes ein rechter ist, §. 23 so betragen die andern beyde Winkel zusammengenommen auch einen rechten, und jeder insbesondere ist ein spitzer Winkel §. 26. auch kann kein Dreyeck mehr als einen rechten Winkel haben. (§. 303).

Tab. I. So betragen die beyde Winkel A und C des rechtwinklichten Dreyeckes A B C fig. 20 zusammen nur einen rechten, jeder insbesondere ist spitz, und das Dreyeck hat nur einen einzigen rechten Winkel B.

§. 128.

Wenn ein Winkel eines Dreyeckes stumpf ist §. 27 so ist die Summe der beyden übrigen Winkel kleiner als ein rechter, und folglich ein spitzer Winkel; jeder dieser beyden Winkel insbesondere ist demnach spitz und kein Dreyeck kann zwey stumpfe oder einen stumpfen und einen rechten Winkel zugleich haben. (§. 304).

Tab. I. So betragen in fig 21, weil B stumpf ist, die beyden andern Winkel A, C des Dreyeckes A B C weniger als ein rechter, oder ihre Summe ist ein spitzer Winkel; um desto mehr aber ist jeder Winkel A, oder C für sich allein ein spitzer, und dies Dreyeck kann nur dem einzigen stumpfen Winkel B haben.

§. 129.

§. 129.

Die Summe jeder zween Winkel eines Dreyecks ist kleiner als zwey rechte Winkel. Ist sie aber kleiner als ein rechter so ist der dritte Winkel stumpf; ist sie einem rechten Winkel gleich, so ist auch der dritte Winkel ein rechter; ist hingegen diese Summe größer als ein rechter, so ist der dritte Winkel ein spitzer. (§. 305).

So betragen jede zwey Winkel der Dreyecke A B C fig. 17 — 21 zusammen weniger als zwey rechte Winkel. Weiß man aber daß fig. 21 die beyden Winkel A, C zusammen weniger als ein rechter betragen, so kann man behaupten: B muß ein stumpfer Winkel seyn. Weiß man eben so: daß A und C fig. 20 zusammen einen rechten Winkel machen, so folgt daß B auch ein rechter seyn muß. Betragen aber zwey Winkel A, B oder A, C oder B, C fig. 17 — 19 zusammen mehr als ein rechter, oder ist die Summe dieser Winkel einem stumpfen gleich, so folgt daß im ersten Fall C im zweyten B und im dritten A ein spitzer Winkel seyn müsse. Tab. I.

§. 130.

Der äussere Winkel eines Dreyeckes §. 48 ist den beyden innern ihm entgegenstehende Winkel §. 49 gleich. (1 Prop. 32) (§. 306).

So

Tab. I. So ist in fig. 17 der äussere Winkel A C D des Dreyeckes A B C eben so groß als die beyden innern dem äussern entgegenstehende Winkel A und B desselben Dreyeckes zusammengenommen; oder A C D = A + B.

§. 131.

In einer jeden ebenen geradlinigten Figur §. 33 ist die Summe aller Winkel, zweymal so vielen rechten Winkeln weniger vieren gleich als die Figur Seiten §. 33 oder Winkel hat. (§. 307).

Tab. I. So ist die Summe aller Winkel des Siebenecks A B C D E F G fig. 16 gleich zwey mahl sieben weniger vier rechten Winkeln, folglich ist sie vierzehn weniger vier oder zehen rechten Winkeln gleich. Nennt man daher die Anzahl der Seiten oder Winkel einer ebenen geradlinigten Figur n so zeigt die Zahl 2 n — 4 die Anzahl der rechten Winkel an, die den Winkeln der Figur zusammengenommen gleich sind. Da nun beym Dreyeck n = 3 so ist 2 n — 4 = 6 — 4 = 2 und es folgt wie §. 126 daß alle Winkel eines jeden Dreyeckes zusammengenommen, zween rechten Winkeln gleich sind. Eben so, da bey jedem Viereck n = 4 so ist die Summe aller Winkel eines jeglichen Vierecks = 2 n — 4 = 8 — 4 = 4 rechten Winkeln. Eben so ist dieses bey andern Vielecken zu verstehen. Da in einer ordentlichen Figur §. 68 alle Winkel einander gleich sind, so kann man aus der

Sum-

Summe aller Winkel desselben, die gleich an $2n - 4$ rechten Winkeln ist, die Größe eines jeden finden, wenn man diese Summe durch die Zahl n theilet, welche die Anzahl der Seiten oder der Winkel der Figur ausdrückt. Es wird also die Größe eines jeden Winkels einer ordentlichen Figur durch $\frac{2n-4}{n}$ rechte Winkel ausgedruckt, und bestimmt werden können, wenn man den rechten Winkel in n gleiche Theile zerfällt, und von diesen gleichen Theilen $2n - 4$ für den gesuchten Winkel nimmt. Will man daher wissen wie groß ein Winkel A oder B oder C u. s. w. des ordentlichen Sechsecks A B C D E F fig. 33 ist, so berechne man den Ausdruck $\frac{2n-4}{n}$, in- Tab. II.

dem man für n die Zahl 6 besetzt, wodurch sich derselbe in $\frac{12-4}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ verwandelt, welches zeigt daß ein jeder der gesuchten Winkel des ordentlichen Sechsecks $\frac{4}{3}$ eines rechten Winkels beträgt. Eben so ist dieses von allen übrigen ordentlichen Figuren zu verstehen, die Anzahl der Seiten oder Winkel mag seyn welche sie wolle.

§. 132.

In jedem gleichgestreckten Viereck §. 51 sind jede zween Winkel, die einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, zusammen zween rechten Winkeln gleich. (§. 284).

So

Tab. I. So sind fig. 23 die Winkel A, B des gleichgestreckten Viereckes A B C D, weil sie den Schenkel AB gemein haben, zusammen zween rechten Winkeln gleich. Eben so sind B + C = 2 R; C + D = 2 R und D + A = 2 R.

§. 133.

In jedem gleichgestreckten Vierecke sind die gegenüberstehende Winkel und Seiten gleich groß. (§. 312) (1 Prop. 34).

Tab. I. Stellt daher fig. 23 ein gleichgestrecktes Viereck vor, so muß A gleich an C und B gleich an D seyn. Eben so müssen die gegenüberstehende Seiten A D und B C so wie A B, D C einander gleich seyn; nehmlich A D = B C und A B = D C.

§. 134.

Wenn ein gleichgestrecktes Viereck einen schiefen Winkel hat, so sind alle übrige Winkel desselben auch schiefe, und die Figur ist ein gleichgestrecktes schiefes Viereck; ist hingegen ein rechter Winkel darinnen so sind alle andere Winkel desselben auch rechte, und die Figur ist ein Rechteck. (§. 313. 314).

Tab. I. et II. Wenn in dem gleichgestreckten Viereck fig. 23 einer der Winkel als A ein schiefer Winkel ist, so werden auch B, C, D schiefe Winkel und die Figur A B C D ist ein gleichgestrecktes schiefes Viereck. Ist hingegen wie fig. 24 in der Figur

gur ABCD ein rechter Winkel als z. B. D anzutreffen, so sind A, B, C auch rechte Winkel und die Figur ist ein Rechteck.

§. 135.

Wenn in einem Dreyeck §. 39 einer der Winkel, einem Winkel eines andern Dreyecks gleich ist, und es sind auch die Seiten beyder Dreyecke welche die gleichen Winkel einschliessen, stückweise einander gleich, so decken sich beyde Dreyecke, und sind sich gleich; oder die dritte Seite beyder Dreyecke, sowohl als die zwey übrigen Winkel, jeder, so einer gleichen Seiten gegenübersteht, stückweise genommen, decken sich und sind sich gleich. (§. 316) (1 Prop. 4).

Wenn fig. 65. 66 die beyden Dreyecke ABC, abc zwey gleiche Winkel B, b haben, und die Seiten AB, BC des ersten Dreyeckes ABC die den Winkel B einschließen sind gleich den Seiten ab, bc (nehmlich AB = ab, BC = bc) des andern Dreyeckes abc, welche den gleichen Winkel b einschliessen so decken beyde Dreyecke einander, wenn A auf a, B auf b, C auf c fällt, und die dritte Seite AC des ersten Dreyeckes ist gleich der dritten Seite ac des andern, der Winkel A, so BC gegenübersteht, ist gleich dem Winkel a der bc gegenüber liegt, und endlich ist der Winkel C, weil er AB gegenüber liegt, gleich dem Winkel c der im andern Drey- Tab. III.

Dreyeck der AB gleichen Seite ab entgegengesetzt ist.

§. 136.

Wenn zween Winkel eines Dreyeckes stückweise zween Winkel eines andern Dreyeckes gleich sind, und eine Seite des ersteren ist einer Seite des leztern nicht nur gleich, sondern liegt auch, in Absicht der gleichen Winkel, im ersten Dreyeck eben so, wie die ihr gleiche Seite im zweyten, so decken sich beyde Dreyecke einander und sind sich gleich; oder der dritte Winkel des ersten Dreyeckes ist dem dritten Winkel des zweyten Dreyeckes nicht nur gleich, sondern die beyden übrigen Seiten der Dreyecke so gleichen Winkeln gegenüberstehen decken sich auch einander stückweise, und sind sich gleich. (§. 320) (1 Prop. 26).

Tab. III. Wenn in den Dreyecken ABC, abc fig. 65. 66 der Winkel A dem Winkel a und der Winkel B dem Winkel b gleich ist, überdem aber die Seite AC, die dem Winkel B entgegengesetzt ist, mit der Seite ac, die im andern Dreyeck dem Winkel b = B gegenüberliegt, gleiche Größe hat, so decken beyde Dreyecke einander und C ist auch gleich c so wie AB, welche C gegenüberliegt, gleich ab, die c entgegensteht; eben so ist BC = bc weil die diesen Seiten gegenüberstehende Winkel A, a auch einander gleich sind.

§. 137.

§. 137.

Dreyecke welche von Seiten eingeschlossen werden, die, stückweise genommen, einander gleich sind, decken einander und sind sich gleich; auch sind in denselben diejenigen Winkel gleich groß, so gleichen Seiten gegenüberstehen, oder von gleichen Seiten eingeschlossen werden. (§. 323) (1 Prop. 8).

Wenn in dem Dreyecke A B C fig. 65 die Seiten A B, B C, A C den Seiten a b, b c, a c des Dreyeckes a b c fig. 66 gleich sind, nehmlich A B = a b, B C = b c, A C = a c so decken beyde Dreyecke einander, und sind sich gleich; auch sind die Winkel A, a, weil sie gleichen Seiten B C, b c gegenüberstehen, oder von gleichen Seiten A B, a b und A C, a c eingeschlossen werden, einander gleich. Eben so ist dieses von den Winkeln B, b wie auch von den Winkeln C, c zu verstehen. Tab. III.

Anmerkung. Die in vorigen drey §. enthaltene Sätze geben eben so viele Kennzeichen der Gleichheit zweyer Dreyecke; man könnte daher den im §. 135 enthaltenen Satz, das erste, den im §. 136 vorkommenden, das zweyte, und den im §. 137 begriffenen, das dritte Kennzeichen der Gleichheit zweyer Dreyecke nennen. Das im §. 154 enthaltene besondere Kennzeichen ist noch zu merken.

§. 138.

In jedem gleichschenklichten Dreyecke

§. 42 sind die Winkel an der Grundlinie
§. 43 einander völlig gleich. (§. 317)
(1 Prop. 5).

Tab. I. So sind im gleichschenklichten Dreyecke ABC fig 19 die Winkel B, C an der Grundlinie einander gleich.

§. 139.

Wenn in einem Dreyeck zwey Winkel einander gleich sind, so ist das Dreyeck gleichschenklicht, und die Seite desselben so zwischen den gleichen Winkeln liegt, ist die Grundlinie dieses gleichschenklichten Dreyecks. (§. 321) (1 Prop. 6).

Tab. I. So kann man behaupten, daß wenn die Winkel B, C des Dreyeckes ABC fig. 19 einander gleich sind: das Dreyeck sey gleichschenklicht, und BC die Grundlinie, AB, AC aber die gleichen Schenkel desselben.

§. 140.

Ein jedes Dreyeck welches drey gleiche Winkel hat ist auch gleichseitig; und umgekehrt ist ein jedes gleichseitiges Dreyeck auch gleichwinklicht. (§. 322).

Tab. I. Weiß man daher daß die Winkel A, B, C des Dreyeckes ABC fig. 18 einander gleich sind, so kann man schließen: die Seiten AB, BC, AC dieses Dreyeckes müssen auch untereinander gleich seyn. Ist aber dies Dreyeck gleichseitig,

so

so kann man behaupten: es müsse auch gleiche Winkel A, B, C haben.

§. 141.

Ein jedes Viereck darinnen jede zwo gegenüberliegende Seiten sich gleich sind, ist ein gleichgestrecktes Viereck, zieht man aber in einem solchen Viereck eine Querlinie §. 56 so halbiret dieselbe das gleichgestreckte Viereck, und die beyden durch die Theilung entstehende Dreyecke sind sich gleich. (§. 331)(1 Prop. 34).

So ist das Viereck A B C D fig. 67, wo je- Tab. III.
de zwo gegenüberstehende Seiten einander gleich gemacht worden, nehmlich A D = B C; A B = D C, ein gleichgestrecktes Viereck; zieht man aber in dasselbe eine Querlinie A C, so halbiret solche das gleichgestreckte Viereck in zwey gleiche Dreyecke A B C, A C D.

§. 142.

Aus einem bestimmten Punkte einer graden Linie, kann nicht mehr als eine einzige grade Linie auf derselben senkrecht errichtet werden. Eben so kann von einem Punkte nach einer graden Linie nicht mehr als eine und dieselbe Linie senkrecht gezogen werden. (§. 266).

So kann aus einem Punkte D einer graden Tab. III.
Linie A B fig. 68 nur eine grade Linie C D auf selbiger senkrecht errichtet werden; alle andere

grade Linien aus eben diesem Punkte wie D F gezogen, stehen schief auf A B. Eben so kann von einem Punkte C, nach der graden Linie A B nur die einzige C D senkrecht gezogen werden, alle übrige grade Linien, die von eben diesem Punkte C, nach der Linie A B, wie hier C E, laufen, fallen schief auf dieselbe.

§. 143.

Wenn die Grundlinie eines gleichschenklichten Dreyeckes halbirt wird, und man zieht von der Spitze desselben nach dem Theilungspunkt der Grundlinie eine grade Linie: so fällt diese senkrecht auf die Grundlinie, theilet den, der Grundlinie entgegengesetzten Winkel in zween gleiche Theile, und halbirt das Dreyeck selbst. (§. 335).

Tab. III. Wenn demnach die Grundlinie B C des gleichschenklichten Dreyeckes A B C fig. 69 in D halbirt, folglich B D = D C gemacht wird, und man zieht von der Spitze A desselben nach D die grade Linie A D, so steht A D auf B C senkrecht, theilet den Winkel B A C in zween gleiche Theile, oder Winkel B A D und D A C, und halbirt das Dreyeck A B C in zwey einander völlig gleiche Dreyecke A B D, A D C.

§. 144.

Wenn man von der Spitze eines gleichschenklichten Dreyeckes auf die entgegen=

gegenstehende Grundlinie eine senkrechte Linie fallen läßt: so theilet diese Linie die Grundlinie in zween gleiche Theile, oder halbirt dieselbe. Eben diese Linie theilet auch den Winkel an der Spitze, eben so wie das ganze Dreyeck selbst, in zween gleiche Theile oder Helften. (§. 336).

So theilet die linien A D von der Spitze des gleichschenklichten Dreyeckes A B C fig. 69 auf die Grundlinie senkrecht gezogen, die Grundlinie B C in D in zween gleiche Theile B D, D C. Eben diese Linie A D aber zerfället auch den Winkel B A C, an der Spitze A, in die zween einander gleiche Winkel B A D, D A C, und theilet das Dreyeck A B C selbst in den zween einander völlig gleichen Dreyecken, A B D, A D C. Tab. III.

§. 145.

Wird der Winkel eines gleichschenklichten Dreyeckes, welcher der Grundlinie desselben gegenübersteht, in zween gleiche Theile getheilt, so fällt die grade Linie, welche diesen Winkel halbirt, senkrecht auf die Grundlinie, theilet dieselbe in zween gleiche Theile, und halbirt das Dreyeck selbst. (§. 338).

Zerfällt man daher den Winkel B A C des gleichschenklichten Dreyeckes A B C fig. 69 durch die grade Linie A D in zween gleiche Winkel B A D, D A C, so stehet A D auf die Grundlinie B C senkrecht, theilet sie in zween gleiche Tab. III.

Theile B D, D C, und halbirt das Dreyeck A B C, indem hierdurch das Dreyeck A B D dem Dreyeck A D C gleich gemacht wird.

§. 146.

In jedem Dreyeck liegt die größere Seite dem größern Winkel gegenüber, und umgekehrt steht auch der größere Winkel der größern Seite gegenüber. (§. 340) (1 Prop. 18. 19).

Tab I. fig. 17 Wenn der Winkel A des Dreyeckes A B C der größte Winkel des Dreyeckes ist, so ist die, diesem Winkel gegenüberliegende Seite B C auch die größte Seite dieses Dreyecks. Und wenn der Winkel A C B größer als der Winkel B ist, so ist auch die Seite A B die dem ersten Winkel A C B gegenüberliegt, größer als die Seite A C, welche dem kleinern Winkel B eben dieses Dreyecks entgegengesetzt ist. Eben so folgt umgekehrt, wenn B C > A B ist, so muß A > A C B seyn, und wenn A B > A C so ist auch A C B > B folglich wenn B C die größeste Seite des Dreyeckes ist, so ist auch A der größte Winkel desselben; ist hingegen A C die kleinste Seite eben dieses Dreyeckes, so ist auch der, dieser kleinsten Seite gegenüberliegende Winkel B, der kleinste Winkel des Dreyecks.

§. 147.

Die schiefe Seite eines rechtwinklichten Dreyeckes §. 54 ist die größte Seite des=

desselben, folglich größer als eine jede der rechten Seiten §. 55 des Dreyecks. Im stumpfwinklichten Dreyeck hingegen liegt die größte Seite immer dem stumpfen Winkel gegenüber. (§. 341).

So ist die schiefe Seite A C des rechtwinklichten Dreyeckes A B C fig. 20 die größte Seite dieses Dreyeckes; oder A C > A B und auch A C > B C. Im stumpfwinklichten Dreyecke A B C fig. 21 ist A C die größte Seite weil sie dem stumpfen Winkel B gegenüberliegt, oder A C > A B und A C > B C. Tab. I.

§. 148.

Wenn von einem beliebigen Punkte nach einer graden Linie eine senkrechte ist gezogen worden, so ist diese unter allen möglichen Linien, welche von eben dem Punkte nach der graden Linie gezogen werden können, die kürzeste. (§. 342).

So ist die grade Linie C D fig. 70, welche von dem Punkte C senkrecht gegen die grade Linie A B gezogen worden, unter allen graden Linien C E, C F, C G welche von eben dem Punkte C nach der graden Linie A B gezogen werden können, die kürzeste. Tab. III.

§. 149.

Wenn von einem beliebigen Punkte nach einer graden Linie zwo schiefe Linien gezogen worden, so ist, von beyden schiefen

fen Linien, diejenige die kleinste oder kürzeste, welche der, von eben dem Punkte, auf die gegebene grade Linie senkrecht gezogenen am nächsten liegt. (§. 343).

Tab. III. So ist von den beyden graden Linien CF, CG fig. 70, welche von eben dem Punkte C schief nach AB gezogen worden, CF die kürzeste, weil sie der CD, die von eben dem Punkte C senkrecht auf AB gezogen ist, am nächsten liegt.

§. 150.

Von einem bestimmten Punkte, können nach einer gegebenen graden Linie, nur zwo grade Linien von eben der Größe gezogen werden, und zwar fallen die beyden gezogenen Linien auf verschiedene Seiten der senkrechten Linie, die von eben dem Punkte auf die gegebene Linie gefällt werden kann. (§. 344).

Tab. III. So können von dem Punkte C nach der graden Linie AB fig. 70 nur zwey grade Linien CE, CF von gleicher Größe gezogen werden, und zwar fällt die erste CE auf der einen, die zwote CF aber auf der andern Seite der senkrechten Linie CD.

§. 151.

Wenn von einem bestimmten Punkte, nach einer gegebenen graden Linie, eine andere schief gezogen wird, so können

aus

aus eben dem Punkte zwo kleinere einander völlig gleiche grade Linien nach der gegebenen gezogen werden, die beyde auf einer und der nehmlichen Seite der schiefen Linie fallen. Hingegen kann man aus eben dem Punkte nicht zwo einander gleiche grade Linien ziehen, die größer als die schiefe sind, und beyde auf der nehmlichen Seite derselben fallen. (§. 345. 346).

Wenn von dem Punkte C nach der graden Tab. III.
Linie AB fig. 71 die grade linie CD schief gezogen worden, so kann man von eben dem Punkte C zwo kleinere, und gleiche grade Linien CE, CF ziehen, die beyde auf der nehmlichen Seite von CD fallen. Es läßt sich aber von eben dem Punkte nicht mehr als eine einzige grade Linie CG auf der nehmlichen Seite von CD ziehn, die auch größer als CD wäre.

§. 152.

Wenn zwo grade Linien und ein Winkel gegeben werden, um damit ein Dreyeck zu verfertigen, bey welchem eine der beyden Seiten dem gegebenen Winkel gegenüberliegen soll, so können mit eben diesen Stücken zwey verschiedene Dreyecke verfertiget werden, wenn nur die Seite so dem gegebenen Winkel gegenüberliegt, kleiner als diejenige ist, welche an eben diesen Winkel anschließt, und die drey

gegebene Stück bestimmen allein nicht, welches von beyden Dreyecken das verlangte ist. (§. 347).

Tab. III. Wenn die zwo graden Linien a, b nebst dem Winkel c fig. 72 gegeben sind, und man soll damit ein Dreyeck verfertigen, darinnen die kleinste Linie b dem gegebenen Winkel c gegenüberliegen soll, so kann man mit diesen Linien und dem Winkel ein Dreyeck CFG fig. 70 verfertigen, darinnen der Winkel CGF = c die Seiten CG = a und die andern CF = b ist; mit eben diesen Stücken kann aber auch das Dreyeck CGE fig. 70 verfertigt werden, wo CG = a, CGE = c, und CE = b ist. Folglich lassen sich mit eben den Linien, und eben dem Winkel, unter der nehmlichen Bedingung zwey von einander völlig verschiedene Dreyecke CGF und CGE verfertigen.

Anmerkung. Dies ist der einzige Fall in der ganzen Meßkunst wo aus dreyen gegebenen Stücken eines Dreyeckes, darunter eine Seite ist, dasselbe nicht bestimmt werden kann, sondern wo noch andere Umstände in Betrachtung gezogen werden müssen, um zu entscheiden welches von den beyden möglichen Dreyecken das verlangte ist.

§. 153.

Wenn in einem rechtwinklichten Dreyeck eine der rechten Seiten §. 55 abnimmt,

nimmt, so muß die andere rechte Seite zunehmen, wenn die schiefe Seite §. 54 eben dieses Dreyeckes unverändert ihre Größe behalten soll. Eben so muß die andere rechte Seite abnehmen, wenn die erste zunimmt. (§. 348).

Wenn im rechtwinklichten Dreyecke ABC Tab. III. fig. 73 die eine rechte Seite BC abnimmt, und sich in BD verwandelt, so muß die andere rechte Seite AB zunehmen, und sich in EB verwandeln, wenn die schiefe Seite AC sich in eine andere DE von gleicher Länge verwandeln soll; eben so muß AB abnehmen, wenn BC länger werden, AC aber unverändert bleiben, oder vielmehr sich in eine andere schiefe Seite eines rechtwinklichten Dreyeckes verwandeln soll.

§. 154.

Wenn in zween rechtwinklichten Dreyecken, zwo Seiten des einen, die den rechten Winkel nicht einschliessen, stückweise zwoen Seiten des andern, die gleichermaßen den rechten Winkel nicht einschliessen, gleich sind, so decken sich beyde Dreyecke völlig und sind sich gleich; oder die dritte Seite des einen ist der dritten Seite des andern gleich, und die Winkel, welche in beyden Dreyecken gleichen Seiten gegenüberliegen, decken sich einander stückweise, und sind sich gleich. (§. 349).

Wenn die rechtwinklichten Dreyecke ABC, Tab. III.

abc

a b c fig. 74 zwo Seiten A B, A C stückweise genommen gleich an a b, a c haben, und davon keine die rechten Winkel B, b einschliesset, so decken sich beyde Dreyecke, und sind sich gleich, oder die dritte Seite B C des ersten ist gleich der dritten Seite b c des andern, und die Winkel A, a die den gleichen Seiten B C, b c gegenüberstehen, sowohl als die zwey andern C, c welche eben so den gleichen Seiten A B, a b gegenüberliegen, decken sich, und sind sich gleich.

§. 155.

Auf einer graden Linie können nicht zwo grade Linien die zwoen andern stückweise gleich sind, nach einerley Gegend in verschiedenen Punkten zusammengestellt werden, so daß sie mit den andern einerley Endpunkte hätten. (1 Prop. 7). Oder zwo grade Linien, die nicht aus eben dem Punkte als zwo andere grade Linien nach zween Punkten einer dritten Linie laufen, sind sich, stückweise genommen, ungleich.

Tab. III. So sind die graden Linien C A, C B, fig. 78 die nicht aus eben dem Punkte D als zwo andere grade Linien D A, D B nach den beyden Punkten A, B der graden Linie A B laufen, stückweise genommen, diesen andern graden Linien ungleich; nehmlich A C, A D sowohl als C B, D B sind in diesem Fall unter einander ungleich.

§. 156.

§. 156.

Wenn aus einem Punkte einer graden Linie zwo andere auf beyden Seiten derselben gezogen werden, und die daher entstehende Nebenwinkel zweenen rechten Winkeln gleich sind, so liegen gedachte beyde Linien, in einerley graden Linie. (1 Prop. 14).

So fallen die aus dem Punkte D der graden Linie CD fig. 8. 9 gezogene grade Linien AD, DB in einerley graden Linie AB zusammen, weil sie auf verschiedenen Seiten der Linie CD liegen, und zwey Nebenwinkel ADC, CDB machen, welche zusammen zweenen rechten Winkeln gleich sind. Tab. I.

§. 157.

Wenn auf die Endpunkte einer Seite eines Dreyeckes zwo grade Linien, so gestellt werden, daß sie innerhalb des Dreyeckes in einem Punkte zusammenlaufen, so sind dieselben kleiner als die beyden übrigen Seiten des Dreyeckes, schließen aber einen größern Winkel ein. (1 Prop. 21).

Wenn von den Punkten B, C der Grundlinie BC eines Dreyeckes ABC fig. 76 zwey grade linien BD, CD bey einem Punkte D innerhalb des Dreyeckes zusammenlaufen, so sind sie kleiner als die Seiten AB, AC eben dieses Dreyeckes; der Winkel D aber den sie einschliessen, Tab. III.

sen,

sen, ist größer als der Winkel A des Dreyeckes ABC.

§. 158.

Der Umkreis §. 32 einer Kreisfläche §. 34 kann nicht durch drey Punkte einer graden Linie gehen. (§. 352).

Tab. II. So kann der Umkreis ADBC der Kreisfläche fig. 27 nicht durch drey Punkte der graden linie AB gehen, weil alle Punkte der linie AB in der Kreisfläche liegen, verlängert man aber AB, so fallen alle Punkte dieser verlängerten graden linie ausserhalb der Kreisfläche, und deren Umkreis; und von allen Punkten der graden linie AB sind nur die beyden A, B möglich, durch welche der Umkreis gehen kann, man mag AB auch so weit verlängern als man will.

§. 159.

Kreisflächen deren Halbmesser §. 37 gleich sind, decken sich, und sind sich gleich. Eben so sind die Umkreise solcher Kreisflächen sich völlig gleich. (§. 355) (III Def. 1).

Tab. III. So decken sich die Kreisflächen a, b fig. 75 oder sind sich gleich, wenn die Halbmesser AB, CD derselben gleich sind, und der einen Umkreis decket den Umkreis der andern, und ist ihn gleich.

§. 160.

§. 160.

Ausschnitte §. 63 von einer nehmlichen oder gleichen Kreisfläche, das will sagen: solche, deren Halbmesser gleich sind, decken sich und sind sich gleich, so wie auch die, diesen Ausschnitten begrenzende, Kreisbögen, wenn nur beyde Ausschnitte gleiche Winkel am Mittelpunkt §. 65 haben. Sind aber die Winkel am Mittelpunkt ungleich, so sind es auch die Ausschnitte, sowohl als die Kreisbögen dieser Ausschnitte. (§. 355) (III Prop. 26).

Wenn man sich vorstellt die beyden Aus- Tab. III.
schnitte ABC, abc fig. 76 seyn beyde aus der nehmlichen Kreisfläche a oder b fig. 75 oder aus jedem insbesondere geschnitten, so werden die Ausschnitte ABC, abc gleiche Halbmesser AB = BC = ab = bc haben, wenn die Halbmesser AB, CD der Kreisflächen a, b nur einander gleich sind; haben nun beyde Ausschnitte überdem gleiche Winkel am Mittelpunkt: B, b, so decken sie sich und sind sich gleich; alsdenn aber fallen auch die Kreisbögen AC, ac zusammen, und sind sich gleich. Sind aber die Ausschnitte DEF, def fig. 77 auch mit gleichen Halbmessern beschrieben, die Winkel am Mittelpunkte aber ungleich, so sind auch die Ausschnitte selbst, sowohl als ihre Kreisbögen DF, df einander ungleich.

§. 161.

§. 161.

Jeder Durchmesser eines Kreises §. 59 theilet die Kreisfläche, sowohl als den Umkreis derselben in zween gleiche Theile. (§. 356).

Tab. II. So theilet der Durchmesser AB die Kreisfläche und dem Umkreis derselben fig. 28 in zween gleiche Theile.

§. 162.

Wenn zwey Ausschnitte, oder die Kreisbögen derselben, sowohl als ihre Halbmesser gleich groß sind, so sind auch die Winkel der Ausschnitte am Mittelpunkt einander gleich. (§. 357) (III Prop. 26).

Tab. III. Wenn die Ausschnitte ABC, abc fig. 76 einander gleich sind, und gleiche Halbmesser AB, ab oder BC, bc haben, so sind die Winkel am Mittelpunkt, B, b einander auch gleich. Sind aber die Kreisbogen AC, ac, sowohl als die Halbmesser AB, BC, ab, bc zweyer Ausschnitte gleich groß, so sind auch die Winkel am Mittelpunkte B, b einander gleich.

§. 163.

Wenn der Bogen eines Ausschnittes in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilet wird, und man zieht von jedem Theilungspunkt einen Halbmesser an den

Mit-

Mittelpunkt, so wird der Winkel des Ausschnittes in eben so viele gleiche Theile getheilt. Und umgekehrt, wenn der Winkel in gleiche Theile getheilet ist, und man verlängert die theilenden Linien, so wird der Bogen in eben so viele gleiche Theile getheilet. (§. 358).

So wird der Winkel B des Ausschnittes ABC fig. 80 in vier gleiche Theile zerfällt, wenn man den Bogen AC nur in vier gleiche Theile theilet, und von jedem Theilungspunkt nach dem Mittelpunkt B grade linien oder die Halbmesser cB, bB, aB zieht. Umgekehrt wird auch der Bogen AC in vier gleiche Theile Ac, cb, ba, aC zerfällt, wenn man die graden linien Bc, Bb, Ba die den Winkel am Mittelpunkt ABC in vier gleiche Winkel ABc, cBb, bBa, aBC eintheilen, nur bis an den Bogen AC des Ausschnittes verlängert. Tab. III.

§. 164.

Wenn man aus dem Mittelpunkte eines Kreises auf eine Sehne §. 58 desselben, die kein Durchmesser ist, eine grade Linie senkrecht zieht, so wird die Sehne durch diese grade Linie halbirt. Umgekehrt steht eine grade Linie welche die Sehne halbirt und durch den Mittelpunkt geht auf der Sehne senkrecht. (§. 359) (III Prop. 3).

Tab.III. So theilet die senkrechte Linie CD fig. 81 welche vom Mittelpunkt C auf die Sehne AB eines Kreises senkrecht fällt, diese Sehne in D in zween gleiche Theile AD, DB. Ist aber die Sehne eines Kreises in D in zween Theile AD, DB zerfällt, und man zieht von dem Theilungspunkt D der Sehne AB nach dem Mittelpunkt C des Kreises eine grade Linie DC so steht diese auf der Sehne senkrecht.

§. 165.

Jede grade Linie welche eine Sehne des Kreises senkrecht halbirt geht durch den Mittelpunkt des Kreises, und theilet, wenn sie verlängert wird, die Bögen der Sehne in zween gleiche Theile. (§. 359) (III Prop. 1 Coroll).

Tab.III. Wenn die grade Linie ED fig. 81 die Sehne AB in D halbirt, und auf ihr senkrecht steht, so geht sie durch den Mittelpunkt C des Kreises, und theilet, wenn sie verlängert wird die Bögen AEB, AFB der Sehne AB in zween gleiche Theile bey E und F.

§. 166.

Wenn zwo Sehnen eines Kreises die nicht durch den Mittelpunkt gehen, einander in einem Punkte schneiden, so sind die Theile beyder Sehnen einander ungleich. (III Prop. 4).

Tab.III. So theilen zwo Sehnen AB, CD fig. 82 wel-

welche sich in einem Punkte E ausser dem Mittelpunkt F schneiden einander immer in ungleiche Theile AE, EB oder CE, ED.

§. 167.

Zwey Kreise die einander schneiden haben nicht einerley Mittelpunkt. (III Prop. 5).

So können die Kreise welche sich fig. 63 Tab. III. in A und B schneiden nicht einen nehmlichen Mittelpunkt C oder D haben, sondern beyder Kreise Mittelpunkte müssen von einander verschieden sind.

§. 168.

Zwey Kreise, deren einer, den andern inwendig berührt haben nicht einerley Mittelpunkt. (III Prop. 6).

Wenn der innere Kreis fig. 83 den äussern Tab. III. in A berührt, so haben beyde Kreise zwey verschiedene Mittelpunkte C und D.

§. 169.

Wenn von einem Punkte innerhalb eines Kreises der nicht der Mittelpunkt ist, mehrere grade Linien bis an die Kreislinie gezogen werden: so ist diejenige in welcher der Mittelpunkt sich befindet die allergröste, und ihre Verlängerung die allerkleinste; unter den übrigen aber ist immer diejenige, welche der grö-

sten näher ist, größer als diejenige, welche weiter von ihr absteht; auch können nur zwo gleiche grade Linien, vom angenommenen Punkte auf beyden Seiten der kleinsten oder grösten Linie nach dem Umkreise gezogen werden. (III Prop. 7).

Tab. III. So ist die grade Linie A B welche aus dem Punkte A fig. 84 durch den Mittelpunkt C bis an die Kreislinie in B gezogen worden, unter allen aus A nach der Kreislinie gezogenen graden Linien A F, A E, A D, A G die gröste, ihre Verlängerung A D aber unter allen die kleinste; die der grösten A B näher als A E liegende Linie A F ist auch größer als A E; und aus dem Punkte F können zwo gleiche grade Linien A E, A G bis an die Kreislinie gezogen werden, davon die eine auf der einen, die andere aber auf der andern Seite der kleinsten A D oder der grösten A B fällt.

§. 170.

Wenn von einem Punkte ausserhalb eines Kreises mehrere grade Linien nach der Kreislinie gezogen werden: so ist unter denen die inwendig die Kreislinie treffen, diejenige, die durch den Mittelpunkt geht, die allergröste, und jede andere welche ihr näher ist, größer als solche die weiter von ihr abstehn; unter denen aber welche auswendig auf die Kreislinie stoßen, ist diejenige, welche verlängert durch den Mittelpunkt gehen würde, die kleinste,

und

und jede andere welche ihr näher ist, kleiner, als die, welche weiter von ihr abstehn. Auch können vom angenommenen Punkte zwo gleiche grade Linien auf beyden Seiten der kleinsten oder der grösten nach dem Umkreise gezogen werden. (III Prop. 8).

So ist unter allen möglichen graden linien Tab. III. AF, AB, AD, AE, die von einem Punkte A, der ausserhalb des Kreises BFGHIKED fig. 85 liegt, sind gezogen worden, und die Kreislinie inwendig treffen, die grade linie AB welche durch den Mittelpunkt C geht die gröste, die AD welche ihr näher liegt als AE aber auch gröser als AE; unter den graden linien AK, AI, AH, AG hingegen, welche von A ausserhalb die Kreislinie in K, I, H, G treffen, die AH, welche verlängert durch den Mittelpunkt C gehen würde, die kürzeste, die AI aber, so näher an AH liegt, auch kleiner als die weiter von ihr entfernte AK. Auch können nur die graden linien AK, AG oder AE, AF auf beyden Seiten der AH oder AB von gleicher länge gezogen werden, davon das erste Paar ausserhalb, das andere innerhalb die Kreislinie trift.

§. 171.

Wenn von einem Punkte innerhalb eines Kreises mehr als zwo gleiche grade Linien nach dem Umkreise gezogen werden können: so ist derselbe der Mittelpunkt. (III Prop. 9) (§. 363).

Tab. I. So kann man behaupten, daß wenn drey grade Linien AB, AC, AD von einem Punkte A fig. 15 nach der Kreislinie gezogen werden können: der Punkt A müsse der Mittelpunkt des Kreises seyn.

§. 172.

Ein Kreis schneidet einen andern nur in zween Punkten (III Prop. 10).

Tab. III. So können die beyden Kreise fig. 63 einander in nicht mehr als in zween Punkten A und B schneiden.

§. 173.

Wenn ein Kreis einen andern inwendig berührt, so stößet die grade Linie welche die Mittelpunkte beyder Kreise verknüpfet, verlängert, an den Berührungspunkt. (III Prop 11).

Tab. III. So stößet die grade Linie DC, fig. 83, welche die beyde Mittelpunkte C, D der Kreise vereiniget, die sich in A berühren, verlängert, an den Berührungspunkt A.

§. 174.

Wenn zween Kreise einander auswendig in einem Punkte berühren: so gehet die grade Linie, welche ihre Mittelpunkte verknüpfet, durch den Berührungspunkt. (III Prop. 12).

So gehet die grade Linie A C welche fig. 86 Tab. III. die Mittelpunkte A, C beyder in A sich berühren= den Kreise, miteinander verbindet, durch den Berührungspunkt B.

§. 175.

Zween Kreise berühren einander, so= wohl inwendig als auswendig nur in ei= nem Punkte. (III Prop. 13).

So können sich die beyden Kreise fig. 83 in Tab. III nicht mehr als den einzigen Punkt A berühren, und eben so berühren sich die beyde Kreise fig. 86 nur in dem einzigen Punkte B.

§. 176.

In einerley, oder in gleichen Kreisen, stehen gleiche Sehnen gleichweit vom Mittelpunkte, und wenn zwo Sehnen vom Mittelpunkte gleiche Entfernungen haben, so sind sie sich gleich. (III Prop. 14) (§. 365).

So stehen die gleiche Sehnen A B, E F fig. Tab. III. 87 gleichweit vom Mittelpunkte ab, indem die Entfernung C D der ersten, der Entfernung C G der andern vom Mittelpunkte C gleich ist. Und wenn man weiß daß die Entfernungen C D, C G zwoer Sehnen A B, E F vom Mittel= punkte C einander gleich sind, so kann man be= haupten die Sehnen A B, E F müssen gleiche Größe haben.

§. 177.

Von zwoen Sehnen eines Kreises ist diejenige die gröste, welche dem Mittelpunkte näher liegt, und umgekehrt liegt eine größere Sehne dem Mittelpunkt näher als eine kleinere. (III Prop. 15) (§. 365).

Tab. III. So ist die Sehne AB fig. 87 größer als die Sehne HI weil die Entfernung CD der ersten vom Mittelpunkte C kleiner ist, als die Entfernung CK der andern. Ist hingegen eine Sehne EF größer als eine andere HI so muß auch die Entfernung CG der ersten Sehne, vom Mittelpunkte C, kleiner als die Entfernung CK der andern seyn.

§. 178.

Eine jede Sehne fällt ganz innerhalb des Kreises. (III Prop. 2) (§. 366).

Tab. III. So fällt eine jede der Sehnen AB, EF, HI fig. 87 ganz innerhalb des Kreises, und kein Theil derselben kann ausserhalb der Kreislinie liegen.

§. 179.

Die gröste Sehne eines Kreises ist der Durchmesser desselben. Die übrigen Sehnen werden, wenn man sie mit dem Durchmesser gleichlaufend zieht, desto kleiner je weiter sie sich von demselben entfernen. (§. 367) (III Prop. 15).

So

So ist der Durchmesser CD unter allen gleichlaufenden Sehnen CD, EF, GH, IK des Kreises fig. 88 die gröste; die übrigen werden um desto kleiner, jemehr sie sich von CD entfernen, oder je größer ihr Abstand BL, oder BM, oder BN wird. Tab. III.

§. 180.

Alle Kreisbögen die zwischen gleichlaufende Sehnen eines Kreises fallen: sind gleich groß. (§. 368).

So sind die Kreisbogen CE, FD oder EG, FH oder GI, HK fig. 88, weil sie zwischen gleichlaufenden Sehnen CD, EF, GH, IK eingeschlossen sind, gleich groß. Tab. III.

§. 181.

Gleiche Sehnen theilen einerley oder gleiche Kreisflächen und die Kreislinien derselben, in gleiche Abschnitte §. 60 und gleiche Kreisbögen. (§. 369) (III Prop. 28).

So schneiden die gleichen Sehnen AB, EF von der nehmlichen Kreisfläche fig. 87 gleiche Abschnitte ALBDA, EMFGE ab; und die von der Kreislinie abgeschnittene Bögen ALB, EMF sind auch einander gleich. Es werden also auch die Abschnitte, sowohl als die Kreisbögen, welche nach geschehenen Schnitt, von der Kreisfläche und von der Kreislinie übrig bleiben, auch jede unter sich gleich seyn. Eben so, wenn Tab. III.

man in den zween gleichen Kreisen fig. 89. 90. gleiche Sehnen AC, ac zieht, so theilen dieselbe die Kreisflächen in gleiche Abschnitte ABC, abc oder ADC, adc, und die Kreislinien in gleiche Kreisbögen ABC, abc oder ADC, adc.

§. 182.

Wenn man von einerley oder gleichen Kreisflächen gleiche Abschnitte, und von einerley oder gleichen Kreislinien gleiche Kreisbögen nimmt, so sind in beyden Fällen die zustimmenden Sehnen gleich groß. (§. 369) (III Prop. 29).

Tab. III. Werden von der nehmlichen Kreisfläche fig. 87 die gleichen Abschnitte ALBDA, EMFGE, oder von der Kreislinie die gleichen Kreisbögen ALB, EMF genommen, so sind die in beyden Fällen zustimmenden Sehnen AB, EF einander gleich. Eben so, wenn man von den gleichen Kreisflächen fig. 89. 90. die gleichen Abschnitte ABCA, abca oder ADCA, adca, sowohl als von den gleichen Kreislinien ABCD, abcd die gleichen Kreisbögen ABC, abc oder ADC, adc nimmt: so sind in allen Fällen die zustimmenden Sehnen AC, ac einander völlig gleich.

§. 183.

Eine Berührungslinie des Kreises §. 64 hat mit der Kreislinie nur einen einzigen Punkt gemein, und kein Theil der Kreis=

Kreislinie fällt mit einem Theile der Berührungslinie zusammen. (§. 373).

So giebt es in der Berührungslinie A D fig. 30 nur einen einzigen Berührungspunkt A, welcher der graden linie B D, und der durch A gehenden Kreislinie gemein ist; es kann aber kein Theil der graden linie B D mit einem Theile der aus C gezogenen Kreislinie zusammenfallen. Tab. II.

§. 184.

Jeder Halbmesser §. 37 welcher vom Mittelpunkt eines Kreises nach dem Berührungspunkt einer Berührungslinie gezogen worden, steht senkrecht auf die Berührungslinie. (§. 374) (III Prop. 18).

So steht der Halbmesser C A fig. 30, welcher vom Mittelpunkte C nach dem Berührungspunkt A gezogen worden, auf die Berührungslinie B D senkrecht. Tab. II.

§. 185.

Wenn im Berührungspunkt eine grade Linie auf die Berührungslinie eines Kreises senkrecht errichtet wird, so geht sie durch den Mittelpunkt des Kreises. (§. 374) (III Prop. 19).

So geht die grade linie A C welche aus dem Berührungspunkt A auf die Berührungslinie BD senkrecht gezogen worden, durch den Mittelpunkt C des Kreises. Tab. II.

§. 186.

§. 186.

Es kann zu einem bestimmten Punkte einer Kreislinie, nicht mehr als eine einzige Berührungslinie gezogen werden. (§. 375).

11. So läßt sich durch den Punkt A der Kreislinien fig. 30 nur die einzige Berührungslinie BD ziehen.

§. 187.

In jedem Kreise ist der Winkel am Mittelpunkte §. 65 doppelt so groß als ein Winkel am Umkreise §. 66, der mit ihm auf einerley Kreisbogen stehet. (§. 376) (III Prop. 20).

Tab. III. Wenn der Winkel am Mittelpunkte BCD fig. 91 mit dem Winkel am Umkreise BAD auf einerley Kreisbogen BD stehet, so ist der erste genau doppelt so groß als der letzte.

§. 188.

Alle Winkel am Umkreise welche auf einerley oder gleichen Kreisbögen stehen, sind gleich groß. (§. 377) (III Prop. 27).

Tab. IV. Wenn die Winkel am Umkreise DAE, DBE, DCE fig. 92 alle auf dem nehmlichen Kreisbogen DE stehen, so sind sie sämmtlich einander gleich. Eben dieses ist so zu verstehen, wenn ein oder der andere dieser Winkel

kel nicht auf dem nehmlichen, aber auf einem dem Bogen DE gleichen Kreisbogen stünde.

§. 189.

In jedem Kreise sind alle Winkel in einerley Abschnitt §. 67, einander gleich. (§. 377) (III Prop. 21).

So sind die Winkel AEB, ADB, ACB, Tab. IV. die in einerley Abschnitt AEDCBA des Kreises fig. 93 eingeschrieben worden, einander völlig gleich, nehmlich AEB = ADB = ACB. Eben so sind die Winkel AFB, AGB, AHB einander gleich, da sie alle in dem Abschnitte AFGHBA eingeschrieben sind.

§. 190.

Jeder Winkel am Umkreise welcher auf einer Helfte der Kreislinie stehet, oder in die halbe Kreisfläche eingeschrieben worden, ist ein rechter Winkel. (§. 378. 379) (III Prop. 31).

So ist der Winkel ACB, sowohl als Tab. IV. ADB fig. 94 ein rechter Winkel, weil beyde auf der halben Kreislinie AEB stehen, oder in die halbe Kreisfläche ACDBA eingeschrieben worden.

§. 191.

Jeder Winkel am Umkreise, welcher auf einen Kreisbogen stehet, der kleiner als die halbe Kreislinie ist, oder welcher

in

in den größeren Abschnitt §. 61 der Kreisfläche ist eingeschrieben worden: ist ein spitzer Winkel. (§. 378) (III Prop. 31).

Tab. IV. So sind die Winkel AFB, AGB, AHB fig. 93 sämmtlich spitze Winkel, da sie alle auf einen Kreisbogen AEDCB stehen, der kleiner als die halbe Kreislinie ist, oder auch, weil sie sämmtlich in den größern Abschnitt AFGHBA der Kreisfläche eingeschrieben worden.

§. 192.

Jeder Winkel am Umkreise, welcher auf einen Kreisbogen stehet, der größer als die Helfte der Kreislinie ist, oder welcher in den kleinern Abschnitt §. 62 der Kreisfläche ist eingeschrieben worden: ist ein stumpfer Winkel. (§. 378) (III Prop. 31).

So sind die Winkel AEB, ADB, ACB fig. 93 sämmtlich stumpfe Winkel, da sie alle auf den Kreisbogen AEGHB stehen, der größer als die Helfte der Kreislinie ist, oder da diese Winkel sämmtlich in den kleineren Abschnitt AEDCBA der Kreisfläche eingeschrieben sind.

§. 193.

Die gegenüberstehende Winkel eines jeden innerhalb eines Kreises beschriebenen Vierecks §. 69, sind zween rechten Winkeln gleich. (III Prop. 22).

Tab. IV. So betragen jede zwey gegenüberstehende Winkel A und C oder B und D des im Kreise ein-

eingeschriebenen Vierecks ABCD fig. 95, zusammengenommen, zween rechte Winkel.

§. 194.

Auf einerley geraden Linie können nicht zwey ungleiche Abschnitte, nach einerley Gegend zu, stehen, deren Winkel am Umkreise gleich wären. (III Prop. 23).

So können auf der nehmlichen geraden Linie AB fig. 96 nicht zwey ungleiche Abschnitte ACB, ADB nach einerley Gegend zu, oder über die Linie AB gestellt werden, welche gleiche Winkel am Umkreise ACB, ADB hätten, indem der erste Winkel jederzeit größer als der letzte ist. Tab. IV.

§. 195.

Abschnitte deren Winkel am Umkreise gleich sind, und auf gleichen Sehnen stehen, sind einander gleich. (III Prop. 24).

Es sind demnach die beyden Abschnitte ACB, acb fig. 97 einander gleich, da ihre Winkel am Umkreise ACB, acb, sowohl als ihre Sehnen AB, ab einander gleich sind. Tab. IV.

§. 196.

Wenn von dem Berührungspunkt einer Berührungslinie des Kreises, eine Sehne im Kreise gezogen wird: so schliesset dieselbe mit der Berührungslinie zween Winkel ein, welche wechselweise den

Win-

Winkeln in beyden Abschnitten §. 67 gleich sind. (§. 380) (III Prop. 32).

Tab. IV. So ist der Winkel ECB fig. 98 welchen die Berührungslinie AB mit der Sehne EC beym Berührungspunkt C einschließt dem Winkel EDC in Abschnitte EDC gleich. Eben so ist der Winkel ECA, der ein Nebenwinkel von ECB ist, gleich dem Winkel EFC im andern Abschnitte EFC.

§. 197.

Wenn der Umkreis einer Kreisfläche in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilet wird, so schliessen die Sehnen, der hierdurch entstehenden gleichen Bögen, eine ordentliche Figur §. 63 ein, welche eben so viele Seiten oder Winkel erhält, als der Umkreis der Kreisfläche Theile hat. (§. 385).

Tab. IV. So entsteht ein ordentliches Fünfeck ABCDE fig. 99 wenn der Umkreis einer Kreisfläche in fünf gleiche Bögen AB, BC, CD, DE, EA getheilet, und zu jedem Bogen die Sehne gezogen wird.

Anmerkung. Ob es gleich nicht möglich ist auf eine allgemeine Art, den Umkreis einer Kreisflächen nach Gründen der niedern Meßkunst in jede beliebige Anzahl Theile zu zerfällen, so kann doch dieses durch Versuche leicht und genau geschehen, so daß

daß wenn bloß auf die Anwendung dieses Satzes gesehen wird, die Beschreibung einer jeden ordentlichen Figur als möglich anzusehen ist.

§. 198.

Eine jede ordentliche Figur wird, wenn man alle ihre Winkel durch grade Linien halbirt, in gleichschenklichte Dreyecke zerfällt, die einander völlig decken können. (§. 389).

So theilen fig. 99 die graden Linien AF, BF, CF, DF, EF, welche die Winkel A, B, C, D, E, des ordentlichen Fünfecks ABCDEF halbiren, dies ordentliche Fünfeck in gleichschenklichte Dreyecke AFB, BFC, CFD, DFE, EFA, die einander völlig gleich sind. Tab. IV.

Anmerkung. Da die Dreyecke, welche durch die Theilung der Winkel einer ordentlichen Figur entstehn, gleichschenklicht, und untereinander gleich sind, so fallen die Spitzen aller gleichschenklichten Dreyecke, in einen Punkt zusammen, welcher von jeder Ecke der Figur gleich weit entfernt ist, und folglich der Mittelpunkt der ordentlichen Figur genannt werden kann, weil sich aus demselben ein Kreis beschreiben läßt; welcher durch alle Ecken der Figur gehet.

§. 199.

Jede Seite eines ordentlichen Sechsecks ist eben so groß, als der Halbmesser eines Kreises, der aus dem Mittelpunkte des ordentlichen Sechsecks, um dasselbe beschrieben werden kann. Theilet man aber jeden Winkel eines ordentlichen Sechseck in zween gleiche Theile, so entstehen sechs gleichseitige und gleiche Dreyecke. (§. 391. 393).

Tab. IV. So ist jede der Seiten AB, BC, CD, DE, EF, FA des ordentlichen Sechsecks ABCDEF fig. 100 eben so groß, als der Halbmesser eines Kreises, der aus dem Mittelpunkte G um dies ordentliche Sechseck beschrieben werden kann. Die graden linien AG, BG, CG, DG, EG, FG aber, welche die Winkel des ordentlichen Sechsecks halbiren, zertheilen das Sechseck in sechs gleichseitige und gleiche Dreyecke AGB, AGC, CGD, DGE, EGF, FGA.

§. 200.

Wenn von dem Mittelpunkt einer ordentlichen Figur auf jede Seite derselben senkrechte Linien gezogen werden, so sind diese untereinander gleich, und es läßt sich, durch die Punkte, wo die senkrechten Linien die Seiten der Figur schneiden, ein Kreis innerhalb der Figur be-

beschreiben, den die Seiten der Figur bey diesen Punkten berühren. (§. 394).

So sind die graden linien FG, FH, FI, Tab. IV. FK, FL welche aus dem Mittelpunkt F des Fünfecks ABCDE fig. 101 auf die Seiten AB, BC, CD, DE, EA desselben senkrecht gezogen worden, einander völlig gleich. Und durch die Punkte G, H, I, K, L, wo die senkrechten linien die Seiten der Figur treffen, läßt sich aus F ein Kreis innerhalb der Figur beschreiben, den die Seiten AB, BC, CD, DE, EA in K, L, G, H, I berühren.

§. 201.

Wenn von dem Mittelpunkte einer ordentlichen Figur auf die Seiten derselben, senkrechte Linie gezogen werden, so halbiren diese die Seiten der Figur. Eben diese senkrechte Linien bilden um den Mittelpunkt, eben so viele gleiche Winkel, als die Figur Seiten hat, und theilen den Umkreis einer innerhalb der Figur beschriebenen Kreisfläche in eben so viele gleiche Kreisbögen. (§. 395).

So halbiren die aus F auf die Seiten AB, Tab. IV. BC, CD, DE, EA der ordentlichen Figur ABCDE fig. 101 senkrecht gezogene grade linien FK, FL, FG, FH, FI die Seiten dieser Figur in K, L, G, H, I.

Eben diese senkrechte Linien bilden um F die gleichen Winkel KFL, LFG, GFH, HFI,

IFK deren Anzahl eben so groß ist, als die Anzahl der Seiten der Figur, und wenn innerhalb der Figur ein Kreis beschrieben wird, so theilen auch diese senkrechte Linien die durch K, L, G, H, I gehende Kreislinie in eben so viele gleiche Kreisbögen KL, LG, GH, HI, IK als die Figur ABCDE Seiten hat.

§. 202.

Wenn der Umkreis einer Kreisfläche in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilet wird, und man ziehet durch jeden Theilungspunkt eine Berührungslinie des Kreises, so entsteht, wenn man die Berührungslinien so weit verlängert bis sie einander schneiden, eine ordentliche um einen Kreis beschriebene Figur §. 70 von eben so vielen Seiten als Theilungspunkte in der Kreislinie angenommen worden. (§. 396).

Tab. IV. Stellet man sich daher den Umkreis einer Kreisfläche in fünf gleiche Theile, bey G, H, I, K, L fig. 101, eingetheilet vor, und zieht zu diesen Punkten die Berührungslinien CD, DE, EA, AB, BC, und verlängert sie, bis sie sich in D, E, A, B, C schneiden, so entsteht das ordentliche um den Kreis beschriebene Fünfeck ABCDE.

§. 203.

Jede ordentliche im Kreise einge-

schriebene Figur ist kleiner als die Kreisfläche, ihr Umkreis kleiner als die Kreislinie, und der Abstand jeder Seite vom Mittelpunkt kleiner als der Halbmesser des Kreises worinnen die Figur eingeschrieben worden. (§. 398).

So ist das im Kreise eingeschriebene Fünf- Tab. IV.
eck, ABCDE fig. 99 kleiner als die Kreisfläche, sein Umkreis kleiner, als die der Kreisfläche begrenzende Kreislinie, und der Abstand FG jeder Seite BC kleiner als der Halbmesser FB oder FC des Kreises.

§. 204.

Wenn in einen nehmlichen Kreis zwo verschiedene ordentliche Figuren eingeschrieben worden, davon die eine doppelt so viele Seiten als die andere hat, so ist jene größer als diese, ihr Umkreis größer als der Umkreis der leztern, und der Abstand jeder ihrer Seiten vom Mittelpunkt des Kreises auch größer als der Abstand jeder Seite der zwoten Figur von eben dem Mittelpunkte. (§. 398).

Wenn in den Kreis dessen Mittelpunkt L Tab. IV.
ist fig 102, ein ordentliches Zeheneck ABCDE FGHIK und ein ordentliches Fünfeck ACEGI eingeschrieben worden, so ist das Zehneck größer als das Fünfeck, weil dieses fünf Dreyecke ABC, CDE, EFG, GHI, IKA weniger als jenes hat; auch ist der Umkreis des Zehenecks größer

als der Umkreis des Fünfecks, und der Abstand Ln einer jeden Seite wie FE des Zehenecks größer als der Abstand Lm einer jeden Seite wie GE des Fünfecks.

§. 205.

Wenn in einen Kreis ein ordentliches Vieleck §. 57 von n Seiten eingeschrieben ist, und man beschreibt in eben den Kreis nach und nach andere Vielecke von 2n, 4n, 8n &c. Seiten: so nähern sich diese, je= mehr und mehr, der Kreisfläche, ihr Um= kreis der Kreislinie, und der Abstand ih= rer Seiten vom Mittelpunkte dem Halb= messer des Kreises, dergestalt, daß wenn man in dieser Verdoppelung fortfähret, der Unterschied der Figur von der Kreis= fläche, des Umkreises der Figur von der Kreislinie, und des Abstandes jeder Sei= te der Figur von dem Halbmesser des Kreises zuletzt kleiner ausfällt, als die kleinste Größe von eben der Art, die man sich vorstellen kann. In diesem Verstan= de kann gesagt werden; eine Kreisfläche ist einer ordentlichen in dieser Kreisfläche eingeschriebenen Figur von unendlich vie= len Seiten gleich, deren Umkreis mit der Kreislinie zusammenfällt, und darinn je= de Seite vom Mittelpunkt des Kreises, um den Halbmesser des Kreises entfernt ist. (§. 398).

So

So würde sich ein in den Kreis dessen Mittelpunkt L ist. fig. 102 eingeschriebenes ordentliches zwanzigeck der Kreisfläche noch mehr, als das ordentliche Zehneck ABCDEFGHIK, nähern; würde aber in eben den Kreis ein ordentliches Vierzigeck eingeschrieben, so würde dieses der Kreisfläche noch näher, als das ordentliche Zwanzigeck kommen, und so könnte man sich, durch fortgesetztes Verdoppeln der Seiten einer ordentlichen, im Kreise eingeschriebenen, Figur, der Kreisfläche so sehr nähern als man immer wollte. Indem sich aber die Figur der Kreisfläche nähert, so nähert sich auch ihr Umkreis der Kreislinie, und der Abstand ihrer Seiten dem Halbmesser des Kreises. In dem Fall aber wo die ordentliche im Kreise beschriebene Figur die Kreisfläche decket, fällt der Umkreis der Figur mit der Kreislinie zusammen, und der Abstand jeder Seite der Figur vom Mittelpunkte, wird dem Halbmesser des Kreises gleich. Tab. IV.

§. 206.

Jede ordentliche um einen Kreis beschriebene Figur §. 70 ist größer als die Kreisfläche, ihr Umkreis größer als die Kreislinie, und der Abstand jeder Ecke derselben, vom Mittelpunkt größer als des Kreises Halbmesser. (§. 399).

So ist das um den Kreis beschriebene ordentliche Fünfeck ABCDE fig. 101 größer als die Kreisfläche, sein Umkreis größer als die Tab. IV.

Kreislinie, und der Abstand FE einer jeden Ecke E der Figur, größer als die Halbmesser FG, FH, FI, FK, FL des Kreises.

§. 207.

Wenn um einen nehmlichen Kreis zwo verschiedene ordentliche Figuren beschrieben worden, davon die eine doppelt so viele Seiten als die andere hat, so ist jene kleiner als diese, ihr Umkreis kleiner als der Umkreis der leztern, und der Abstand jeder ihrer Ecken vom Mittelpunkt des Kreises auch kleiner als der Abstand jeder Ecke der zwoten Figur von eben diesem Mittelpunkte. (§. 399).

Tab. IV. Wenn um den Kreis dessen Mittelpunkt F ist fig. 103, ein ordentliches Zeheneck abcde fghik, und ein ordentliches Fünfeck ABCDE beschrieben worden: so ist das Zeheneck kleiner als das Fünfeck, weil dieses fünf Dreyecke Aba, Bcd, Cef, Dgh, Eik mehr als jenes hat; auch ist der Umkreis des Zehenecks kleiner, als der Umkreis des Fünfecks, und der Abstand Fa einer Ecke a des Zehenecks kleiner als der Abstand FA einer Ecke A des Fünfecks.

§. 208.

Wenn um einen Kreis ein ordentliches Vieleck §. 57 von n Seiten beschrieben ist, und man beschreibt um eben den Kreis, nach und nach, andere Vielecke von

2n,

2n, 4n, 8n &c. Seiten, so nähern sich diese, jemehr und mehr, der Kreisfläche, ihr Umkreis der Kreislinie, und der Abstand ihrer Ecken vom Mittelpunkte dem Halbmesser des Kreises, dergestalt: daß, wenn man in dieser Verdoppelung fortfähret, der Unterschied der Figur von der Kreisfläche, des Umkreises von der Kreislinie, und des Abstandes der Ecken vom Halbmesser des Kreises, zuletzt kleiner ausfällt, als die kleinste Größe von eben der Art, die man sich vorstellen kann. In diesem Sinn kann demnach gesagt werden: eine Kreisfläche ist einem ordentlichen um dieselbe beschriebenen Vielecke, von unendlich vielen Seiten, gleich, deren Umkreis mit der Kreislinie zusammenfällt, und bey welcher der Abstand jeder Ecke vom Mittelpunkt so groß ist als der Halbmesser des Kreises. (§. 399).

So würde sich ein um den Kreis, dessen Tab. IV. Mittelpunkt F ist, fig. 103 beschriebenes ordentliches Zwanzigeck, der Kreisfläche noch mehr als das ordentliche Zehneck a b c d e f g h i k nähern; beschriebe man aber, um eben den Kreis, ein ordentliches Vierzigeck, so würde dieses der Kreisfläche noch näher als das ordentliche Zwanzigeck kommen, und so könnte man sich, durch fortgesetztes Verdoppeln der Seiten eines ordentlichen um den Kreis beschriebenen Vieleckes, der Kreisfläche so sehr nähern, als man immer

wollte. Indem sich aber das Vieleck der Kreisfläche nähert, so nähert sich auch ihr Umkreis der Kreislinie, und der Abstand ihrer Ecken vom Mittelpunkte dem Halbmesser des Kreises. In dem Fall aber, wo das ordentliche um den Kreis beschriebene Vieleck die Kreisfläche decket, fällt der Umkreis des Vieleckes mit der Kreislinie zusammen, und der Abstand der Ecken der Figur vom Mittelpunkte, wird dem Halbmesser des Kreises gleich.

§. 209.

Wenn in einer Verhältnißgleichung §. 74 die Glieder lauter Zahlen sind, so giebt das erste Glied durch das zweyte getheilt, einen eben so großen Bruch, als das dritte durch das vierte getheilt. (§. 161).

Stellen daher alle Glieder folgender Verhältnißgleichung

$$a : b = c : d$$

Zahlen vor: so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

§. 210.

Wenn zwey Brüche einander gleich sind, so hat der Zähler des ersten Bruchs zu seinem Nenner eben das Verhältniß, als der Zähler des andern zu seinem Nenner. (§. 162).

Ist

Ist daher

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

so muß auch

$$a : b = c : d \text{ seyn.}$$

§. 211.

Ein Verhältniß wird dadurch nicht geändert, wenn man beyde Glieder desselben, mit einerley Zahl vervielfältiget, oder mit einerley Zahl theilet. (§. 164).

So wird ein Verhältniß A : B nicht geändert, wenn man auch beyde Glieder desselben mit einerley Zahl m vervielfältiget, oder mit einerley Zahl m theilet.

Es ist nehmlich

$$A : B = m.A : m.B \text{ oder}$$

$$A : B = \frac{A}{m} : \frac{B}{m}$$

§. 212.

Wenn man die mittlern Glieder einer Verhältnißgleichung miteinander verwechselt, so machen die verwechselten Glieder mit den ungeänderten in der Ordnung, wie sie stehen, wiederum eine Verhältnißgleichung. (§. 165).

Wenn daher

$$a : b = c : d$$

so ist auch

$$a : c = b : d.$$

§. 213.

Wenn vier Größen eine Verhältniß-gleichung machen, so kann man die Glieder in beyden Verhältniß verwechseln, und die verwechselten Glieder werden eben so eine Verhältnißgleichung machen. (§. 171).

Wenn demnach

a : b = c : d

so ist auch

b : a = d : c.

§. 214.

Wenn zwey Verhältnisse einander gleich sind, so verhalten sich die Summen der Glieder eines jeden Verhältnisses, wie die gleichnahmigten Glieder §. 72 beyder Verhältnisse. (§. 171).

So wird, wenn

a : b = c : d ist

1°. a + b : c + d = a : c und

2°. a + b : c + d = b : d

Welche Verhältnißgleichungen man nach §. 212 noch in folgende verwandeln kann.

3°. a + b : a = c + d : c und

4°. a + b : b = c + d : d

Und wegen des im §. 213 enthaltenen Satzes, kann man endlich auch schliessen

5°. a : a + b = c : c + d

6°. b : a + b = d : c + d.

§. 215.

§. 215.

Wenn zwey Verhältnisse einander gleich sind, so verhalten sich die Unterschiede der Glieder eines jeden Verhältnisses, wie die gleichnahmigten Glieder beyder Verhältnisse. (§. 171).

Wenn $a : b = c : d$

so sind, wenn $a > b$ und $c > d$, auch folgende Verhältnißgleichungen richtig.

1°. $a - b : c - d = a : c$

2°. $a - b : c - d = b : d$

Diese beyde Verhältnißgleichungen lassen sich nach §. 212 in folgende verwandeln.

3°. $a - b : a = c - d : c$

4°. $a - b : b = c - d : d$

und endlich wegen §. 213.

5°. $a : a - b = c : c - d$

6°. $b : a - b = d : c - d$.

§. 216.

Wenn zwey Verhältnisse einander gleich sind, so verhalten sich die Summen der Glieder jedes Verhältnisses, eben so, wie ihre Unterschiede. (§. 171).

Ist daher $a : b = c : d$ so wird

1°. $a + b : c + d = a - b : c - d$

2°. $a + b : a - b = c + d : c - d$ nach §. 212

3°. $a - b : a + b = c - d : c + d$ nach §. 213.

§. 217.

Wenn mehrere Verhältnisse, die aus Gliedern von eben der Art bestehen, einander gleich sind, so stehen die Summen oder Unterschiede gleichnahmigter Glieder dieser Verhältnisse, in ein Verhältniß, das jedes der gegebenen gleichen Verhältnissen gleich ist. (§. 174).

Wenn $a : b = c : d = e : f = g : h = i : k$.

So kann man seßen

$a : b = a ; b$

$c : d = a : b$

$e : f = a : b$

$g : h = a : b$

$i : k = a : b.$

Und nun ist

$(a + c + e + g + i) : (b + d + f + h + k) = a : b = c : d = e : f = g : h = i : k.$

Eben so wird

$(a - c + e - g + i) : (b - d + f - h + k) = a : b = c : d = e : f = g : h = i : k.$

§. 218.

Wenn vier Größen eine Verhältnißgleichung machen, und die Glieder des einen Verhältnisses durch Zahlen gegeben sind, so ist das Produkt der äussern Glieder eben so groß als das Produkt der mittlern, und man findet eines der äussern Glie-

Glieder, wenn man das Produkt der mittlern mit dem andern äussern Gliede theilet, oder eines der mittlern, wenn man das Produkt der äussern Glieder mit dem andern mittlern theilet. (§. 175).

So wird wenn a ; b = c : d

$$ad = bc$$

und hieraus

1°. $d = \frac{b.c}{a}$ 2°. $a = \frac{b.c}{d}$

3°. $b = \frac{a.d}{c}$ 4°. $c = \frac{a.d}{b}$.

§. 219.

Wenn zwey Producte einander gleich sind, und ein jedes aus zween Factoren besteht, so machen diese eine Verhältniß-gleichung, wenn nur die Factoren des einen Productes, zu äussern, des andern aber, zu mittlern Glieder der Verhältniß-gleichung genommen werden. (§. 175).

Wenn a, d die Factoren des einem, b, c die Fattoren des andern Productes sind, und es ist $ad = bc$ so wird

1°. a : b = c : d sowohl als

2°. b : a = d : c.

§. 220.

Ein zusammengesetztes Verhältniß §. 75, ist dem Verhältniß des Productes aller Vorderglieder zum Producte aller

Hin-

Hinterglieder, derer in Zahlen ausgedruckten Verhältnissen gleich, woraus es zusammengesezt ist. (§. 177. 178).

Wenn a, b, c, d, e beliebige Grösen m, n, p, q, r, s, t, v hingegen Zahlen vorstellen, und es ist

a : b = m : n
b : c = p : q
c : d = r : s
d : e = t : v.

folglich nach §. 75.

$$a : e = \left\{\begin{matrix} a:b \\ b:c \\ c:d \\ d:e \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} m:n \\ p:q \\ r:s \\ t:v \end{matrix}\right\}$$

so ist auch

a : e = mprt : nqsv.

Nehmen wir nun wie §. 75.

m : n = 1 : 2
p : q = 3 : 4
r : s = 5 : 7
t : v = 8 : 11.

so ist auch a : e = mprt : nqsv = 1 . 3 . 5 . 8 : 2 . 4 . 7 . 11. = 120 : 616.

§. 221.

Ein zusammengesezztes Verhältniß bleibt ungeändert eben dasselbe, wenn gleich die Vorder- oder Hinterglieder der Verhältnisse, woraus es besteht, untereinander verwechselt werden. (§. 179).

So

So ist $a : e = \left\{\begin{matrix} m:n \\ p:q \\ r:s \\ t:v \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} p:v \\ r:s \\ m:q \\ t:n \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 3:11 \\ 5:7 \\ 1:4 \\ 8:2 \end{matrix}\right\}$

Anmerkung. Hierdurch kann öfters die Anzahl der zusammenzusetzenden Verhältnisse vermindert werden. Wie dieses schon im letzten Beyspiel statt findet. Denn da das Verhältniß $8 : 2 = 4 : 1$. so ist auch

$$a : e = \left\{\begin{matrix} 3:11 \\ 5:7 \\ 1:4 \\ 4:1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 3:11 \\ 5:7 \\ 4:4 \\ 1:1 \end{matrix}\right\}$$

wo die beyden letzten Verhältnisse $4 : 4$ und $1 : 1$ weil sie das Verhältniß zwoer gleichen Größen sind, können weggelassen werden, und das Verhältniß $a : e$ kann bloß aus den beyden Verhältnissen $\left\{\begin{matrix} 3:11 \\ 5:7 \end{matrix}\right\}$ zusammengesetzt werden,

und es ist $a : e = 3 . 5 : 11 . 7 = 15 : 77$.

§. 222.

Wenn die gleichnahmigten Glieder §. 72 einer Verhältnißgleichung mit einerley Zahl vervielfältiget oder getheilet werden, so machen die vervielfältigten oder getheilten Glieder von neuem eine Verhältnißgleichung. (§. 183. 184).

Wenn $a : b = c : d$ so ist auch

1°. $ma : b = mc : d$

2°. $ma : nb = mc : nd$

3°. $a : mb = c : md$

4°. $na : mb = nc : md$.

5°. $\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$

6°. $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{m} : \frac{d}{n}$

7°. $a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}$

8°. $\frac{a}{n} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{m}$.

§. 223.

Wenn in zween Verhältnißgleichungen die mittlern Glieder einerley sind: so verhalten sich die ersten Glieder derselben umgekehrt wie die vierten. (§. 185).

Wenn $a : b = c : d$ und auch

$e : b = c : f$

so ist

$e : a = d : f$.

§. 224.

Wenn ein Verhältniß einem andern, umgekehrt genommen, gleich ist, so ist das Verhältniß, welches aus beyden zusammengesetzt ist, dem Verhältniß $p : p = 1 : 1$ gleich. (§. 186).

Wenn $a : b = m : n$ und hingegen

$c : d = n : m$

so ist das zusammengesetzte Verhältniß $\left\{\begin{matrix} a:b \\ c:d \end{matrix}\right\}$ $=$ p : p $=$ 1 : 1. oder ac : bd $=$ p : p. $=$ 1 : 1.

§. 225.

Wenn ein aus zween andern zusammengesetztes Verhältniß dem Verhältniß p : p $=$ 1 : 1 gleich ist: so verhalten sich die Glieder des einen Verhältnisses, woraus das zusammengesetzte besteht, umgekehrt genommen, eben so wie die Glieder des anderen Verhältnisses. (§. 187).

Wenn das zusammengesetzte Verhältniß ac : bd $=$ $\left\{\begin{matrix} a:b \\ c:d \end{matrix}\right\}$ $=$ p : p $=$ 1 : 1 ist, so muß auch

b : a $=$ c : d seyn.

§. 226.

Wenn alle Glieder mehrerer Verhältnißgleichungen in der Ordnung wie sie auf einander folgen miteinander vervielfältiget werden, so machen die Produkte in eben der Ordnung eine neue Verhältnißgleichung. (§. 188).

Wenn

a : b $=$ m : n
c : d $=$ p : q
e : f $=$ r : s
g : h $=$ t : v u. s. w.

so ist auch

$$aceg : bdfh = mprt : nqsv.$$

§. 227.

Wenn vier Größen in Verhältniß stehen, so machen die zwoten, dritten, vierten, und überhaupt die nten Potenzen dieser Größen, in eben der Ordnung, Verhältnißgleichungen. (§. 189).

Wenn $a : b = c : d$ so ist auch

$$a^2 : b^2 = c^2 : d^2$$
$$a^3 : b^3 = c^3 : d^3$$
$$a^4 : b^4 = c^4 : d^4 \text{ und überhaupt}$$
$$a^n : b^n = c^n : d^n .$$

§. 228.

Wenn vier Größen in Verhältniß stehen, so machen die Wurzeln der zwoten, dritten, vierten, und überhaupt der nten Potenzen dieser Größen, in eben der Ordnung, Verhältnißgleichungen. (§. 190.)

Wenn $a : b = c : d$ so ist auch

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{c} : \sqrt{d}$$
$$\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} : \sqrt[3]{d}$$
$$\sqrt[4]{a} : \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{c} : \sqrt[4]{d} \text{ und über-}$$
$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d} \text{ haupt}$$

§. 229.

§. 229.

Ein Verhältniß welches n mahl höher §. 76, als ein anderes ist, welches man als einfach betrachtet, ist dem Verhältniß der nten Potenzen der Glieder des einfachen Verhältnisses gleich. (§. 191).

Wenn das Verhältniß A : Z, n mahl höher ist, als das Verhältniß a : b, welches als einfach betrachtet wird; so ist $A : Z = a^n : b^n$. Woraus klar ist: daß ein zweymal höheres Verhältniß dem Verhältniß der 2ten Potenzen der Glieder des einfachen Verhältnisses, ein dreymal höheres dem Verhältniß der 3ten Potenzen der Glieder des einfachen u. s. w. gleich seyn müsse.

§. 230.

Ein Verhältniß welches n mahl niedriger §. 76 als ein anderes ist, welches man als einfach betrachtet, ist dem Verhältniß der Wunzeln der nten Potenz aus den Gliedern des einfachen Verhältnisses gleich. (§. 192).

Wenn das Verhältniß a : b, n mahl niedriger ist, als das Verhältniß A : Z. welches man als einfach betrachtet, so ist $a : b = \sqrt[n]{A} : \sqrt[n]{Z}$ wo man für n jede beliebige Zahl nehmen kann.

§. 231.

In einer steтigen Verhältnißgleichung von dreyen Gliedern, ist das Product der äussern Glieder, der zwoten Potenz des mittlern gleich. (§. 193).

Wenn daher $a : b = b : d$
so ist $ad = b^2$ folglich $b = \sqrt{ad}$.

§. 232.

Anmerkung. Wenn man in alle vorigen §. welche sich auf die Verhältnisse beziehen, statt den gebrauchten Buchstaben schickliche Zahlen setzt, so wird man sich so viele Beyspiele als gefällig für jeden Satz selbst wählen können.

§. 233.

Ein jedes Viereck, in welchem zwo gegenüberliegende Seiten gleichlaufend und einander gleich sind, ist ein gleichgestrecktes Viereck. (§. 400) (I Prop. 33).

Tab. III. Wenn zwo gegenüberliegende Seiten AD, BC eines Vierecks ABCD fig. 67 gleichlaufend, und gleich sind, so ist die Figur ein gleichgestrecktes Viereck und die beyden andern Seiten AB, DC dieser Figur sind auch gleichlaufend, und einander gleich.

§. 234.

Wenn eine grade Linie aus gleichen Theilen zusammengesezt ist, und man ziehet durch den Anfangspunkt dieser graden Linie eine andere willkührlich, mit dieser aber durch jeden Theilungspunkt der ersten Linie, gleichlaufende grade Linien: so wird jede grade Linie, welche von der ersten der gleichlaufenden Linien bis an die lezte gezogen werden kann, in eben so viele gleiche Theile durch die gleichlaufenden Linien zerfällt, als die Anzahl der Theile groß ist, woraus die erste zusammengesezt worden. (§. 401).

Wenn die grade Linie AH fig. 104 aus Tab. IV. gleichen Theilen AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH zusammengesetzt ist, und man zieht durch den Anfangspunkt A derselben eine willkührliche grade Linie AI, mit dieser aber durch jeden Theilungspunkt A, B, C, D, E, F, G, H der graden Linie AH die Linien BK, CL, DM, EN, FO, GP, HQ gleichlaufend: so wird jede andere grade Linie ah, a′ h′, a″ h″ welche von einem Punkte a, a′, a″ der ersten der gleichlaufenden Linien bis an einen Punkt h, h′, h″ der letzten gezogen worden, durch die gleichlaufenden Linien BK, CL, DM, EN, FO, GP, bey den Punkten b, c, d &c. oder b′, c′, d′ &c. oder b″, c″, d″ &c. in eben so viele gleiche Theile ab, bc, &c. oder a′b′, b′c′, &c. oder a″b″, b″c″, &c.

&c. eingetheilet, als AH Theile AB, BC, &c. hat.

§. 235.

Wenn drey grade Linien untereinander gleichlaufen, und man zieht von einer der äussersten bis an die andere, zwo neue grade Linien welche von der mittlern geschnitten werden, so haben die Theile dieser Linien, welche zwischen jedem Paare gleichlaufender Linien liegen, einerley Verhältniß, sowohl untereinander, als zu den Linien selbst davon sie Theile sind. (§. 403. 404).

Tab. IV. Wenn die graden Linien AB, CD, EF fig. 105 gleichlaufen, und man zieht von AB aus G die grade linie GH bis an EF in H, aus einem Punkte I der AB aber die IK bis in den Punkt K der EF, die in L und M von der mittlern CD geschnitten werden, so ist

1°. GL : IM = LH : MK
2°. GL : GH = IM : IK
3°. LH : GH = MK : IK

§. 236.

Wenn zwo grade Linien zwischen zwoen gleichlaufenden Linien liegen, und sich in einem Punkte schneiden, so haben die Theile dieser graden Linien, welche zwischen dem Zerschneidungs Punkt, und einer gleichlaufenden Linie liegen, sowohl unter

unter sich, als zu den ganzen graden Linien einerley Verhältniß. (§. 405.)

Wenn die graden linien EF, GH fig. 106. Tab. IV. zwischen zwoen gleichlaufenden linien AB, CD liegen, und sich in I schneiden, so ist

1° EI : GI = ID : IH
2° EI : ED = GI : GH
3° ID : ED = IH : GH.

§. 237.

Wenn in einem Dreyecke mit irgend einer Seite eine gleichlaufende Linie gezogen wird, so theilet sie die andern beyden Seiten des Dreyecks verhältnißmäßig; und wenn umgekehrt zwo Seiten eines Dreyeckes verhältnißmäßig eingetheilet sind, so ist die grade Linie welche die Theilungspunkte verknüpfet, mit der dritten Seite des Dreyeckes gleichlaufend. (§. 406. 407) (VI Prop. 2).

Wenn in dem Dreyeck ABC, die grade linie DE mit der Seite BC dieses Dreyeckes gleichläuft, so ist

1° AD : AE = DB : EC
2° AD : AB = AE : AC
3° DB : AB = EC : AC.

§. 238.

Wenn ein Winkel eines Dreyeckes durch eine grade Linie halbirt wird, so theilet diese grade Linie, die gegenüber-

stehende Seite des Dreyeckes in zwey Stücke, welche sich gegeneinander eben so, wie die beyden übrigen Seiten verhalten, und umgekehrt, wenn eine Seite eines Dreyeckes in dem Verhältniß der beyden andern Seiten desselben getheilet wird, und man zieht von dem Theilungspunkte, nach der Spitze des gegenüberliegenden Winkels des Dreyeckes, eine grade Linie, so halbiret sie diesen Winkel. (VI Prop. 3).

Tab. IV. Wenn der Winkel A des Dreyeckes A B C fig. 108 in zween gleiche Theile B A D, D A C durch die grade Linie A D getheilet ist, und man verlängert die grade Linie A D bis sie die gegenüberstehende Seite B C in D schneidet, so zerfällt sie diese Seite in zwey Stücke, dergestalt: daß B D : D C = B A : A C. Ist umgekehrt die Seite B C eines Dreyeckes A B C in D dergestalt getheilet, daß sich B D : D C = B A : A C, und man zieht vom Theilungspunkt D der Seite B C nach der Spitze des dieser Seite gegenüberliegenden Winkels A, die grade Linie D A, so theilet sie diesen Winkel in die zween gleichen Winkel B A D, D A C.

§. 239.

Die Umkreise ähnlicher Figuren oder die Theile der Umkreise, welche auf einerley Art zwischen den Spitzen gleicher Winkel liegen, verhalten sich eben so, wie

jede

jede zwo einzelne in den Figuren auf einerley Art liegende Seiten. (§. 415).

So verhalten sich die Umkreise der beyden ähnlichen Figuren A B C D E, a b c d e fig. 38. 39 wie jede zwo einzelne in derselben auf einerley Art liegende Seiten C D, c d oder D E, d e oder E A, e a u. s. w. Eben so verhalten sich die Theile A B C D, a b c d oder A B C, a b c der Umkreise zwoer ähnlichen Figuren, welche auf einerley Art zwischen den Spitzen gleicher Winkel A, a und D, d oder A, a und C, c liegen, wie jede zwo einzelne in den ähnlichen Figuren auf einerley Art liegende Seiten A B, a b oder C D, c d u. s. w. Ist daher das Verhältniß jeder zwo einzelner auf einerley Art liegender Seiten ähnlicher Figuren = m : n so verhalten sich auch die Umkreise, und die auf einerley Art liegende Theile derselben wie m : n. Tab. II.

§. 240.

Wenn zween Winkel eines Dreyeckes, stückweise genommen, zween Winkeln eines andern Dreyeckes gleich sind: so sind die Dreyecke ähnlich; §. 77 das will sagen: der dritte Winkel beyder Dreyecke ist gleich groß, die Seiten welche gleiche Winkel umschliessen, stehen in einerley Verhältniß, und diejenigen Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüberstehen, sind gleichnahmigte Glieder der hieraus ent-

entstehenden Verhältnißgleichungen. (§. 416) (VI Prop. 4).

Tab. IV. Wenn in den beyden Dreyecken ABC, abc fig. 109 die Winkel A, B stückweise den Winkeln a, b gleich sind, nehmlich; A = a; B = b: so sind sich beyde Dreyecke ähnlich; es ist nehmlich der dritte Winkel C des ersten Dreyeckes dem dritten Winkel c des andern gleich, und überdehm

1° AB : AC = ab : ac
2° AC : BC = ac : bc
3° BC : AB = bc : ab.

welche Verhältnißgleichungen sich leicht nach §. 213 in folgende verwandeln lassen.

4° AB : ab = AC : ac
5° AC : ac = BC : bc
6° BC : bc = AB : ab.

Ist daher das Verhältniß zwoer gleichliegender Seiten solcher Dreyecke = m : n so stehen die übrigen gleichliegenden Seiten, die Umkreise, und die Theile der Umkreise, welche auf einerley Art zwischen den Spitzen gleicher Winkel liegen in eben dem Verhältnisse, so wird, wenn

1° AB : ab = m : n auch
2° AC : ac = m : n
3° BC : bc = m : n

und hieraus nach §. 217.

4° AB + AC : ab + ac = m : n
5° AB + BC : ab + bc = m : n
6° AC + BC : ac + bc = m : n

7° AB

7° AB + AC + BC : ab + ac + bc
= m : n.

§. 241.

Wenn ein Winkel eines Dreyeckes einem Winkel eines andern Dreyeckes gleich ist, und die Seiten welche diese gleiche Winkel in beyden Dreyecken umschliessen, haben einerley Verhältniß, so sind die Dreyecke ähnlich, §. 77; denn in diesem Falle hat die dritte Seite jedes Dreyeckes, zu den beyden andern, einerley Verhältniß, die Dreyecke haben lauter gleiche Winkel, und diejenigen Winkel, welche gleichnahmigten Seiten gegenüberstehen, sind einander gleich. (§. 419)(VI Prop. 6).

Wenn in dem Dreyeck ABC fig. 109 der Tab. IV. Winkel A eben so groß ist als der Winkel a des Dreyeckes abc, überdehm aber AB : AC = ab : ac, so sind die Dreyecke ABC, abc ähnlich; denn es wird auch AB : BC = ab : bc und AC : BC = ac : bc und hieraus lassen sich wiederum ähnliche Folgerungen wie zu Ende vorigen §. ziehen; weiter ist der Winkel B dem Winkel b gleich, weil beyde den gleichnahmigten Seiten AC, ac gegenüberstehen, und endlich ist, aus eben dem Grunde, der Winkel C dem Winkel c gleich.

§. 242.

Wenn in zween Dreyecken zwo und

zwo

zwo Seiten untereinander einerley Verhältniß haben: so sind die Dreyecke ähnlich, das will sagen: sie haben lauter gleiche Winkel, und diejenigen Winkel, welche gleichnahmigten Seiten gegenüberstehen, sind gleich groß. (§. 420) (VI Prop. 5).

Fig. IV. Wenn bey den Dreyecken ABC, abc fig. 109 folgende Verhältnißgleichungen statt finden

1) AB : BC = ab : bc
2) BC : AC = bc : ac folglich auch
3) AB : AC = ab : ac.

so haben beyde Dreyecke gleiche Winkel, und da die Seiten AB, ab; BC, bc; AC, ac gleichnahmigt sind, indem sie gleichnahmigte Glieder in den vorigen Verhältnißgleichungen vorstellen, so sind auch die, jedem Paare dieser Seiten, entgegenstehende Winkel, von gleicher Größe, nehmlich C = c, A = a und B = b.

Anmerkung. Die in den drey letzten §. enthaltene Sätze geben eben so viele allgemeine Kennzeichen der Aehnlichkeit zweyer Dreyecke; man könnte daher den im §. 240 enthaltenen Satz das erste, den im §. 241 begriffenen das zweyte, und den im §. 242 vorkommenden das dritte Kennzeichen der Aehnlichkeit zweyer Dreyecke nennen. Auffer diesen dreyen allgemeinen Kennzeichen ist auch noch folgendes beson-

sondere Kennzeichen für rechtwinklichte Dreyecke zu merken.

§. 243.

Rechtwinklichte Dreyecke in denen die Seiten, welche einen der spitzigen Winkel einschliessen einerley Verhältniß haben, sind einander ähnlich, demnach stehen die übrigen Seiten beyder Dreyecke je zwo und zwo in einerley Verhältniß, und diejenigen Winkel beyder Dreyecke welche gleichnahmigten Seiten gegenüberstehen, sind einander gleich. (§. 421)(VI. Prop. 7).

Wenn fig. 110 die Seiten ac, ab welche Tab. IV. den Winkel a des einen Dreyeckes abc einschliessen, sich eben so wie die Seiten AC, AB, welche den Winkel A des andern Dreyeckes ABC einschliessen, verhalten, das ist wenn ac : ab = AC : AB so sind die Dreyecke abc, ABC einander ähnlich, und es wird ac : cb = AC : CB und cb : ab = CB : AB überdehm aber a = A, weil a der Seiten cb und A der Seite CB als gleichnamigte Glieder der vorigen Verhältnißgleichungen gegenüberstehen. Eben dieses ist so von b und B zu verstehen.

§. 244.

Wenn in einem Dreyecke eine grade Linie mit einer Seite desselben gleichlaufend gezogen wird, so schneidet dieselbe

ein

ein Dreyeck ab, welches dem gegebenen ähnlich ist. (§. 417).

Tab. IV. Wenn in dem Dreyecke ABC fig. 107 mit einer Seite BC desselben eine grade linie DE gleichlaufend gezogen wird: so schneidet dieselbe vom Dreyecke ABC das ihm ähnliche Dreyeck ADE ab, und es werden nicht nur die Winkel ADE, ABC; AED, ACB einander gleich, sondern man kann auch ausser den §. 237 angeführten Verhältnißgleichungen noch folgende merken.

1) AD : DE = AB : BC
2) AE : DE = AC : BC.

§. 245.

Wenn zwey Dreyecke zwischen zwoen gleichlaufenden Linien dergestalt eingeschlossen sind, daß die Spitzen derselben in die eine, die Grundlinien aber in die andere gleichlaufende Linie fallen, und man zieht zwischen beyde eine dritte gleichlaufende Linie: so verhalten sich die Abschnitte dieser Linien, welche in den Dreyecken liegen, gegeneinander eben so, wie die Grundlinien derselben; und wenn die Grundlinien der Dreyecke gleich sind, so sind auch diese Abschnitte einander gleich. (§. 418).

Tab. IV. Werden demnach die Dreyecke abc, def. fig. 111, welche zwischen den gleichlaufenden Linien AB, EF gehörig liegen, durch eine dritte gleich-

gleichlaufende Linie CD in gh, ik geschnitten, so ist

gh : ik = bc : ef

woraus sogleich folget: daß, wenn bc = ef ist, auch gh = ik seyn müsse.

§. 246.

Eine ebene geradlinigte Figur ist einer andern ähnlich, wenn alle Winkel beyder Figuren, ausser einem, in der gehörigen Ordnung gleich sind, und alle, in Ansehung dieser gleichen Winkel, auf einerley Art liegende Seiten, einerley Verhältniß haben: ausser den zwoen die den Winkel einschliessen dessen Gleichheit nicht erwiesen werden darf. (§. 426).

Wenn man weis daß in der Figur ABCDE Tab. II. fig. 38 die Winkel A, B, C, D den Winkeln a, b, c, d der Figur abcde, fig. 39 in der Ordnung wie sie aufeinander folgen, gleich sind, und überdem AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de, so kann man behaupten: es müsse auch E = e und AB : ab = AE : ae = ED : ed = CD : cd = BC : bc seyn, und folglich die Figur ABCDE der Figur abcde ähnlich.

§. 247.

Zwo ebene geradlinigte Figuren sind einander ähnlich, wenn alle Winkel der einen, den Winkeln der andern in ihrer

Ordnung gleich sind, ausser zween, zwischen welchen eine Seite lieget, und alle, in Ansehung dieser gleichen Winkel auf einerley Art liegende Seiten, zu einander, einerley Verhältniß haben, außer denjenigen, welche zwischen den Winkeln liegen, deren Gleichheit nicht erwiesen werden darf. (§. 427).

Tab. II. Wenn man weiß daß fig. 38. 39 B = b; A = a; E = e und überdem BC : bc = AB : ab = AE : ae = ED : ed; so kann man behaupten: daß C = c; D = d und CD : cd = BC : bc = AB : ab = AE : ae = ED : ed folglich die Figur ABCDE der Figur abcde ähnlich sey.

§. 248.

Ausschnitte von verschiedenen Kreisflächen sind einander ähnlich, wenn ihre Winkel am Mittelpunkte gleich sind; auch sind die Abschnitte ähnlich, welche mit dergleichen Ausschnitten einerley Bogen haben. (§. 429).

Tab. IV. So sind die Ausschnitte ADBC, adbc fig. 112 einander ähnlich, so wie die Abschnitte ADBA, adba, welche mit den Ausschnitten einerley Bogen, ADB, adb, haben: da die Winkel C, c an den Mittelpunkten beyder Abschnitte gleich groß genommen worden. Hieraus kann man nun schliessen, es müsse

ADB:

ADB : adb = BC : bc = AC : ac = AB : ab seyn.

§. 249.

Die halben oder ganzen Umkreise der Kreisflächen verhalten sich, wie ihre Durchmesser oder Halbmesser. (§. 431).

Es verhalten sich demnach die halben oder ganzen Umkreise der Kreisflächen a, b fig. 75 wie die Halbmesser AB, CD oder wie 2AB zu 2CD, das will sagen: wie die Durchmesser dieser Kreisflächen. Tab. III.

§. 250.

Aehnliche Vielecke können in gleich viele ähnliche Dreyecke zertheilet werden, die in beyden Vielecken einerley Lage haben; und diejenigen Seiten derselben welche zwischen gleichen Winkeln liegen, verhalten sich gegeneinander eben so, wie die auf gleicher Art liegende Seiten der ähnlichen Vielecke. (§. 432. 433) (VI Prop. 20).

Wenn in beyden ähnlichen Figuren ABC DEF, abcdef fig. 213 aus den gleichen Winkeln F, f nach den gleichen Winkeln B, b; C, c; D, d die Querlinien FB, fb; FC, fc; FD, fd gezogen werden, so theilen diese die Figuren in lauter ähnliche Dreyecke ABF, abf; BCF, bcf; DEF, def und es ist AF : af = AB : ab = BF : bf = BC : bc = CF : cf = CD : cd = DF : df = DE : de = EF : ef; und wenn das Verhältniß gleichliegender Seiten Tab. IV.

ten der ähnlichen Figuren = m : n ist, so ist das Verhältniß jedes Paares gleichliegender Querlinien auch wie m : n oder BF : bf = m : n ; CF : cf = m : n ; DF : df = m : n.

Anmerkung. Ueberhaupt haben zwey grade Linien die in zween ähnlichen Vielecken einerley Lage haben, das heißt: deren Endpunkte, in Rücksicht der Winkel und Seiten beyder Figuren, auf eben die Art liegen, eben das Verhältniß als jedes Paar gleichliegender Seiten der ähnlichen Figuren. Ist daher dies Verhältniß = m : n so ist auch das Verhältniß solcher gleichliegender graden Linien = m : n. Und wenn man zwo gleichliegende Seiten wie z. B. FE, fe in eine gleiche Anzahl Theile zerfällt zum Beyspiel in 100, 1000 oder in jede beliebige Anzahl, so werden AF, AB, BC, CD, DE wie auch BF, CF, DF eben so viele Theile der Seite FE enthalten als af, ab, bc, cd, de oder bf, cf, df Theile der Seite fe. Es werden demnach jedes Paar gleichliegender Seiten, oder grader Linien FE, fe; AF, af u. s. w. wie auch BF, bf; CF, cf u. s. w. einerley Anzahl solcher gleichen Theile enthalten. Verzeichnet man daher die Seiten zwoer ähnlichen Figuren nach zween verschiedenen, aber in eben der Anzahl gleicher Theile zerfällten Maaßstäben: so bestimmt eine jede Seite der einen Figur, auf ihren zu-

gehörigen Maaßstabe gemessen, die Anzahl der Theile, welche die gleichliegende Seite der andern Figur auf ihren zustimmenden Maaßstab gemessen, enthält. Dies ist der Grund aller Ausmessungen der Feldmeßkunst, bey welchen die Entfernung der Gegenstände zu bestimmen vorkömmt.

§. 251.

Gleichgestreckte Vierecke die auf einerley oder gleichen Grundlinien stehen, und zwischen einerley gleichlaufenden Linien eingeschlossen sind, sind sich völlig gleich. (§. 459) (I Prop. 35. 36).

So sind die gleichgestreckten Vierecke Tab. IV. KFGL, MFGN fig. 114 einander völlig gleich: da sie auf der nehmlichen Grundlinie FG zwischen den gleichlaufenden Linien AB, CD eingeschlossen sind. Eben so sind die gleichgestreckten Vierecke HEFI, KFGL, MFGN einander gleich: da sie auf gleichen Grundlinien EF, FG zwischen gleichlaufenden Linien AB, CD stehen.

Anmerkung. Wenn gleichgestreckte Vierecke zwischen zwoen gleichlaufenden Linien eingeschlossen sind, so haben die den Grundlinien gegenüberstehende Seiten, von denselben eine gleiche Entfernung, welche durch die senkrechte Linie bestimmt wird, die man von einem beliebigen Punkt dieser Seiten, auf die, wenns nöthig ist, ver-

längerte gegenüberstehende Grundlinie fällen kann, und die Höhe der gleichgestreckten Vierecke genannt zu werden pflegt. Es ist demnach einerley ob man sagt: gleichgestreckte Vierecke sind zwischen gleichlaufenden Linien eingeschlossen, oder: sie haben gleiche Höhe. Daher kann man den vorigen Satz kürzer folgendermaßen ausdrücken: **gleichgestreckte Vierecke von gleichen Grundlinien und Höhen, sind völlig gleich.**

§. 252.

Dreyecke die auf einerley oder gleichen Grundlinien stehen, und zwischen einerley gleichlaufenden Linien eingeschlossen sind, sind einander völlig gleich. (§. 459) (1 Prop. 37. 38).

Tab. IV. So sind die Dreyecke, EFG, IFG fig. 115, welche zwischen zwoen gleichlaufenden Linien, AB, CD, dergestalt auf der nehmlichen Grundlinie FG stehen, daß die Spitzen E, I derselben in der einen, die Grundlinien selbst aber in die andere gleichlaufende Linie fallen, einander völlig gleich. Eben so ist dieses von den Dreyecken EFG, IFG, KGH zu verstehen, welche zwischen den gleichlaufenden Linien AB, CD eingeschlossen sind, und auf gleichen Grundlinien FG, GH stehen.

Anmerkung. Da bey Dreyecken eben so, wie bey gleichgestreckten Vierecken, unter der

Höhe

Höhe derselben, die Entfernung der gleichlaufenden Linien, zwischen welchen die Dreyecke liegen, verstanden, und jedesmal durch die senkrechte Linie bestimmt wird, welche von der Spitze eines Dreyeckes auf die gegenüberliegende, wenns nöthig ist, verlängerte Grundlinie gezogen worden, so kann man auch hier den letzten Satz kürzer folgendermaßen ausdrücken: **Dreyecke von gleichen Grundlinien und Höhen, sind sich gleich.** Und nun lassen sich auch folgende Sätze leicht verstehen.

§. 253.

Gleiche Dreyecke die auf einerley oder gleichen Grundlinien noch einerley Gegend stehen, haben gleiche Höhen. (I Prop. 39. 40).

Wenn die Dreyecke EFG, IFG, KGH Tab. IV. fig. 115 einander gleich sind, und auf der nehmlichen Grundlinie FG oder auf den gleichen Grundlinien FG, GH stehen, so haben sie auch gleiche Höhen, das will sagen: die Entfernungen EL, IM, KN der Spitzen E, I, K von den Grundlinien FG, GH sind gleich groß.

§. 254.

Ein gleichgestrecktes Viereck das mit einem Dreyecke auf einerley oder gleichen

Grundlinien stehet, und mit demselben gleiche Höhe hat, ist doppelt so groß als das Dreyeck. (§. 459) (1 Prop. 41).

Tab. IV. Wenn das Dreyeck ABC mit dem gleichgestreckten Viereck EBCF auf der nehmlichen Grundlinie BC stehet, und beyde haben gleiche Höhen AD, EG, so ist das Dreyeck genau die Helfte vom gleichgestreckten Vierecke. Eben dieses würde auch richtig seyn, wenn das Dreyeck ABC, mit dem gleichgestreckten Viereck EBCF nicht auf eben der Grundlinie BC, aber auf einer andern Grundlinie von gleicher Größe stünde, wenn nur beyde Figuren gleiche Höhen AD, EG hätten.

§. 255.

Wenn in einem gleichgestreckten Viereck eine Querlinie gezogen wird, und man zieht durch einen beliebigen Punkt derselben, mit den Seiten des gleichgestreckten Vierecks, gleichlaufende Linien: so theilen dieselbe dieses Viereck, in vier andere gleichgestreckte Vierecke, davon diejenigen, durch welche die Querlinie nicht gehet, einander gleich sind. (1 Prop. 43).

Tab. IV. So theilen die graden Linien EF, GH welche fig. 117 durch den Punkt I der Querlinie BD des gleichgestreckten Viereckes ABCD mit den Seiten AD, BC und AB, DC desselben gleichlaufen, dies Viereck in vier andere gleichgestreckte Vierecke, AEIG, GIFD, EBHI, IHCF

IHCF, darunter die beyden, AEIG, IHCF, durch welche die Querlinie BD nicht gehet, einander völlig gleich sind.

§. 256.

Dreyecke und gleichgestreckte Vierecke die einerley oder gleiche Höhen haben, verhalten sich wie ihre Grundlinien. (§. 473) (VI Prop. 1).

Wenn daher zwey Dreyecke KGH, ABC fig. 115. 116 gleiche Höhen KN, AD haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundlinien GH, BC; ist daher das Verhältniß der Grundlinien = m : n so ist auch das Verhältniß der Dreyecke = m : n, man mag auch für m und n Zahlen nehmen welche man will. Eben dieses ist so von gleichgestreckten Vierecken zu verstehen, deren Höhen gleich sind. Tab. IV.

§. 257.

Dreyecke und gleichgestreckte Vierecke, von gleichen Grundlinien, verhalten sich wie ihre Höhen. (§. 474).

Sind daher die Grundlinien BC, bc der beyden Dreyecke ABC, abc fig. 118 einander gleich, so verhalten sich die Flächenräume P, Q dieser Dreyecke wie die Höhen AD, ad; oder es ist P : Q = AD : ad. Eben dieses ist so von gleichgestreckten Vielecken zu verstehen, deren Grundlinien einander gleich sind. Tab. IV.

§. 258.

Dreyecke und gleichgestreckte Vierecke stehen in zusammengesetztem Verhältniß ihrer Grundlinien und ihrer Höhen. (§. 475).

Tab. IV. So ist das Verhältniß der Flächenräume Q, p der Dreyecke a b c fig. 118 und A B C fig. 119 aus dem Verhältniß der Grundlinien b c, B C und der Höhen a d, A D zusammengesetzt; oder es ist $Q : p = \binom{bc : BC}{ad : AD} = bc . ad : BC . AD$, das will sagen: die Flächenräume zweyer Dreyecke Q und p verhalten sich wie die Produkte aus den Grundlinien in die Höhen derselben. Dieses ist eben so von gleichgestreckten Vierecken zu verstehen.

§. 259.

Dreyecke und gleichgestreckte Vierecke deren Grundlinien sich umgekehrt wie die Höhen verhalten, sind einander gleich; und eben so, gilt dieser Satz auch umgekehrt. (§. 478. 482) (VI Prop. 16).

Tab. IV. Wenn in den Dreyecken A B C, a b c fig. 119. 120 die Höhen A D, a d sich umgekehrt wie die Grundlinien B C, b c verhalten, das ist: wenn $AD : ad = bc : BC$, so sind die Flächenräume p und R beyder Dreyecke einander gleich. Dieses ist eben so von gleichgestreckten Vierecken zu verstehen.

§. 260.

§. 260.

Wenn die Seite eines ordentlichen Vierecks das mittlere, die Seiten eines Rechtecks aber, die äussern Glieder einer stetigen Verhältnißgleichung von dreyen Gliedern sind; so ist das ordentliche Viereck dem Rechtecke gleich. (§. 479) (VI Prop. 17).

Ist daher die Seite ab des ordentlichen Vierecks abcd fig. 121 das mittlere, die Seiten AB, BC des Rechtecks ABCD fig. 122 die äussern Glieder einer stetigen Verhältnißgleichung; das ist: wenn AB : ab = ab : BC, so sind die Flächenräume beyder Figuren abcd, ABCD einander völlig gleich. Tab. IV.

§. 261.

Wenn zwo Sehnen eines Kreises sich schneiden: so machen die Theile der einen Sehne, mit den Theilen der andern, eine Verhältnißgleichung; dergestalt daß, wenn man die Theile der einen Sehne zu äussern Gliedern der Verhältnißgleichung macht, die Theile der andern die mittlern Glieder derselben werden. Und die Rechtecke welche mit jedem Paar zusammengehöriger Theile dieser Sehnen gebildet werden können, sind einander völlig gleich. (§. 439) (III Prop. 35).

Wenn die Sehnen AB, CD fig. 123 einander in E schneiden, so ist AE : CE = ED : EB Tab. IV.

EB oder CE : AE = EB : ED. Und wenn die Seiten ae, eb des Rechteckes P fig. 124 gleich gemacht werden den Theilen AE, EB der einen Sehne AB, die Seiten ce, ed eines andern Rechteckes Q aber, gleich den Theilen CE, ED der andern Sehne CD, so sind die beyden Rechtecke P, Q einander völlig gleich.

Anmerkung. Wird eine von beyden Sehnen in zween gleiche Theile getheilt, so kann mit den Theilen dieser Sehne auf eben die Art ein ordentliches Viereck beschrieben werden, das dem Rechtecke gleich ist, welches aus den Theilen der andern Sehne gebildet werden kann.

§. 262.

Wenn von einem Punkte ausserhalb eines Kreises, nach demselben zwo grade Linien gezogen worden, davon eine jede die Kreislinie in zween Punkten schneidet: so machen die graden Linien, welche zwischen den augenommenen Punkt, und der Kreislinie enthalten sind, eine Verhältnißgleichung, dergestalt daß, wenn das eine Paar zusammengehöriger Linien zu äussere Glieder genommen wird, das andere Paar die mittlern Glieder der Verhältnißgleichung machet. Und Rechtecke, welche von jedem Paare zusammengehöriger Linien eingeschlossen werden, sind sich gleich. (§. 439).

Wenn daher von einem beliebigen Punkt A nach einem Kreise fig. 125 zwo grade Linien AB, AC gezogen werden, welche die Kreislinien ausser den Punkten, B, C noch in D und E schneiden, so ist AD : AE = AC : AB, oder AE : AD = AB : AC; und ein Rechteck p fig. 126 von den Seiten ad = AD, ab = AB eingeschlossen, ist dem Rechtecke q gleich, welches von den Seiten ae = AE und ac = AC eingeschlossen ist. Tab. IV.

Anmerkung. Wenn eine von den, aus dem angenommenen Punkt gezogenen, graden Linien die Kreislinie, statt zu schneiden, nur in einem Punkte berührt, so kann auf eben die Art mit denselben ein ordentliches Viereck beschrieben werden, das dem Rechtecke gleich ist, welches jedes beliebige Paar zusammen gehöriger schneidender Linien einschliesset. (III Prop. 36). Wenn daher die grade Linie AF den Kreis in F berühret, und man macht ein ordentliches Viereck r fig. 127, dessen Seite af = AF so ist dies ordentliche Viereck einem jedem der Rechtecke p und q fig. 126 gleich, davon das eine p mit den zusammengehörenden schneidenden Linien AD, AB, das andere q aber, mit den andern zusammengehörenden schneidenden Linien AE, AC, beschrieben worden.

§. 263.

§. 263.

Wenn in einem rechtwinklichten Dreyecke, von der Spitze des rechten Winkels, auf die schiefe Seite desselben, eine grade Linie senkrecht gezogen wird, so theilet dieselbe das rechtwinklichte Dreyeck in zween andere Dreyecke, welche sowohl unter sich als den ganzen ähnlich sind. Die Abschnitte der schiefen Seite machen, mit der theilenden Linie, eine stetige Verhältnißgleichung von dreyen Gliedern, davon dieselben die äussern Glieder sind, die theilende Linie aber das mittlere Glied. Eben so ist auch eine jede grade oder rechte Seite das mittlere Glied, zwischen der schiefen Seite und desjenigen Abschnittes derselben, der ihr am nächsten liegt. (§. 453) (VI Prop. 8).

Tab. IV. So theilet die grade Linie CD, welche von der Spitze C des rechten Winkels, ACB fig. 110, auf die schiefe Seite AB des rechtwinklichten Dreyeckes ABC senkrecht ist gezogen worden, dies Dreyeck ABC in zween andere Dreyecke ACD, BCD welche sowohl unter sich, als dem Dreyecke ABC ähnlich sind, und es wird

1°. AD : CD = CD : BD

2°. AB : AC = AC : AD

3°. AB : BC = BC : BD

und es ist folglich nach §. 260 ein Rechteck, welches von AD, BD eingeschlossen wird, gleich einem

einem ordentlichen Viereck, dessen Seite gleich der Linie CD. Eben dies folget, wenn mit AB, AD ein Rechteck und mit AC ein ordentliches Viereck, oder wenn mit AB, BD ein Rechteck, mit BC aber ein ordentliches Viereck gemacht wird. Es ist nehmlich in jedem Falle das Rechteck dem ordentlichen Viereck völlig gleich.

§. 264.

Jede ebene Winkel verhalten sich gegeneinander eben so, wie die Kreisbögen, welche um ihre Spitzen mit gleichen Halbmessern, zwischen den Schenkeln der Winkel beschrieben sind.

So verhalten sich die Winkel B, b fig. 128 wie die mit gleichen Halbmessern BD, bd zwischen ihre Schenkel BA, BC, und ba, be beschriebene Kreisbögen DE, de. Ist daher das Verhältniß der Kreisbögen gleich m : n so ist auch B : b = m : n und es läßt sich das Verhältniß eines jeden Winkels zu einem rechten Winkel bestimmen, wenn man zwischen die Schenkel des gegebenen Winkels einen Kreisbogen mit beliebigem Halbmesser beschreibt, mit dem nehmlichen oder gleichen Halbmesser aber zwischen den Schenkeln des rechten Winkels den vierten Theil der Kreislinie. Denn eben so wie sich, der zwischen den Schenkeln des gegebenen Winkels beschriebene Kreisbogen, zum beschriebenen vierten Theil der Kreislinie verhält, Tab. V.

hält, eben so verhält sich der gegebene Winkel zum rechten Winkel.

Anmerkung. Dies ist der Grund warum man sagt ein Kreisbogen aus der Spitze eines Winkels zwischen seinen Schenkeln beschrieben, sey das Maas des Winkels. Eigentlich kann ein Kreisbogen einen Winkel nicht messen, da beyde von ganz verschiedener Art sind. Es kann aber ein Verhältniß einem andern völlig gleich seyn, wenn gleich die Glieder des ersten mit den Gliedern des andern von ganz verschiedener Art sind. Siehet man daher bloß auf das Verhältniß welches ein Winkel zu einem rechten Winkel hat, so kann man in den oben angeführten Verstande sagen: der Kreisbogen, welcher aus der Spitze des gegebenen Winkels, zwischen seinen Schenkeln, ist beschrieben worden, sey das Maas dieses Winkels, denn eben so oft wie dieser Kreisbogen in dem mit gleichem Halbmesser, zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels, beschriebenen vierten Theil einer Kreislinie enthalten ist, eben so oft ist auch der gegebene Winkel in den rechten Winkel enthalten.

§. 265.

Wenn mehrere Drevecke gleiche Höhen, aber gleiche oder verschiedene Grundlinien haben: so sind sie zusammen ge=

genommen, einem Dreyecke gleich, dessen Höhe gleich der Höhe eines jeden der Dreyecke, dessen Grundlinie aber aus den Grundlinien aller Dreyecke zusammengesetzt ist. (§. 461)

So ist der Flächenraum P des Dreyeckes A′B′C′ fig. 129 gleich den Flächenräumen p, q, r der Dreyecke A B C, a b c, α β γ, weil ersteres mit letzteren gleiche Höhe hat, und seine Grundlinie B′C′ aus den Grundlinien B C, b c, β γ der gegebenen Dreyecke zusammengesetzt ist. Tab. V.

§. 266.

Eine jede ordentliche Figur ist einem Dreyecke gleich, welches zur Grundlinie den Umkreis, zur Höhe aber die Entfernung jeder Seite vom Mittelpunkte der ordentlichen Figur hat. (§. 467).

So ist das ordentliche Sechseck A B C D E F fig. 130 dem Dreyecke a b d gleich, dessen Grundlinie b d gleich ist dem Umkreise A B + B C + C D + D E + E F + F A, dessen Höhe a c aber gleich ist der Entfernung P Q einer Seite C D des ordentlichen Sechseck vom Mittelpunkte P desselben. Tab. V.

§. 267.

Ein jeder Ausschnitt einer ordentlichen Figur ist einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinie dem Theile des Umkreises der ordentlichen Figur gleich ist, welcher

den Abschnitt begrenzt, und dessen Höhe der Entfernung einer jeden Seite der ordentlichen Figur, vom Mittelpunkte derselben, gleich gemacht ist worden. (§. 468).

Tab. V. So ist der Ausschnitt CPE des Sechseckes ABCDEF fig. 130 gleich dem Dreyecke abc dessen Grundlinie bc = CD + DE und dessen Höhe ae = PQ.

§. 268.

Eine Kreisfläche ist einem Dreyecke gleich, welches zur Grundlinie die Kreislinie, zur Höhe aber den Halbmesser der Kreisfläche hat. (§. 469).

Tab, V. Stellt man sich daher den Umkreis einer Kreisfläche dessen Mittelpunkt A fig. 131 ist, in eine grade linie bc fig. 132 verwandelt vor, so ist das Dreyeck abc, so auf dieser Grundlinie bc ist errichtet worden, und ab, gleich dem Halbmesser AB, des aus A beschriebenen Kreises, zur Höhe hat, der Kreisfläche gleich, dessen Mittelpunkt A ist.

§. 269.

Ein Ausschnitt einer Kreisfläche ist einem Dreyecke gleich, welches zur Grundlinie den Bogen des Ausschnittes, zur Höhe aber den Halbmesser der Kreisfläche hat. (§. 470).

Teb. V. So ist der Ausschnitt ABC der Kreisfläche fig. 131 dem Dreyecke $\alpha\beta\gamma$ fig. 133 gleich, dessen Grund=

Grundlinie $\beta\gamma$, dem Bogen BC und dessen Höhe $\alpha\beta$ dem Halbmesser AB der Kreisfläche gieich ist.

Anmerkung. Um eine Kreisfläche in ein Dreyeck von gleichem Flächenraume zu verwandeln kommt alles darauf an: zu jedem gegebenen Durchmesser oder Halbmesser, eine grade linie zu finden welche den Umkreis dieser Kreisfläche gleich ist. Diese grade linie würde leicht bestimmt werden, wenn man genau das Verhältniß wüste, welches der Durchmesser zum Umkreise, oder der Halbmesser zum halben Umkreise hat. Wäre übrigens dies Verhältniß nur für einen einzigen Kreis bekannt, so wäre es auch für alle übrige bestimmt; denn nach §. 249 verhalten sich die Umkreise wie die Halbmesser oder Durchmesser. Demnach haben die Durchmesser zu den Umkreisen, oder die Halbmesser zu den halben Umkreisen verschiedener Kreisflächen, einerley Vrhältniß. Es ist aber bis jetzt nicht möglich gewesen nach Gründen der niedern Meßkunst eine grade linie anzugeben, die zu einem gegebenen Durchmesser den Umkreis der Kreisfläche mit völliger Richtigkeit darstellte, ob es gleich möglich ist solches mit einem kaum merklichen Fehler zu leisten. In der Folge wird gezeigt werden, daß das oben angeführte Verhältniß des Durchmessers zum

Umkreise oder des Halbmessers zum halben Umkreise einer Kreisfläche in Zahlen sehr genau durch 1 : π kann vorgestellt werden, wenn die Zahl π = 3,14159265358979323846 angenommen wird, und von welcher man so viele Ziffern des zehentheiligen Bruches, als man nöthig hat, behalten kann. In dieser Zahl ist der Werth der letzten Ziffer des zehentheiligen Bruches hundert Trillionen Theile, und da dieselbe nicht um eins zunehmen darf, weil sie zu groß seyn würde, so ist der Fehler kleiner als ein hundert Trillionen Theilchen des Durchmessers, auf den ganzen Umkreis, oder des Halbmessers auf den halben Umkreis. Man findet daher den Umkreis einer jeden Kreisfläche, wenn man den Durchmesser derselben mit der Zahl π, die man so genau nehmen kann, als man will, vervielfältiget. Eben so erhält man den halben Umkreis, wenn man die Zahl π mit dem Halbmesser vervielfältiget. Die Länge eines jeden Kreisbogens, wird daher leicht gefunden, wenn man nur den Winkel am Mittelpunkte kennet, den der Kreisbogen misset, nebst dem Halbmesser desselben, denn ist jener φ dieser r so schliesse man wie 2 R : φ = r π zur gesuchten Länge des Bogens, welche demnach = $\frac{\varphi r \pi}{2R}$ gefunden wird, und wozu folgende

Re=

Regel dienet: man vervielfältige die Zahl π mit dem Verhältniß, welches der gegebene Winkel, den der Kreisbogen misset, zu zween rechten Winkeln hat, so giebt das Produkt, mit dem Halbmesser vervielfältiget, die Größe des gesuchten Bogens.

Beyspiel. Es wird ein Ausschnitt einer Kreisfläche gegeben, dessen Winkel am Mittelpunkt $\frac{3}{10}$ eines rechten Winkels beträgt, und dessen Halbmesser gleich 23 Zoll ist, man soll finden: wie groß sein Kreisbogen in Zolle sey.

Auflösung. Da der gegebene Winkel $= \frac{3}{10}$ R ist, so ist sein Verhältniß zu zween rechten Winkeln $= 3 : 32$, wird nun dieses Verhältniß mit der Zahl π vervielfältiget so kommt, wenn man von dieser Zahl nur die fünf ersten Ziffern des zehentheiligen Bruches beybehält, die Zahl 0,29452, welche mit dem Halbmesser $= 23$ vervielfältiget, zur gesuchten Länge des Bogens 6,77396 Zolle giebt. Der gesuchte Bogen ist demnach 6 ganze Zoll, und sieben und siebzig tausend, drey hundert, und sechs und neunzig, hundert tausend Theilchen eines Zolles groß. Weiter unter soll mehr über die Ausmessung der Kreisbögen gesagt werden.

§. 270.

Wenn die Höhen der gleichgestreckten Vierecke oder Dreyecke, sich eben so wie ihre Grundlinien verhalten, so ist das

Verhältniß der gleichgestreckten Vierecke, oder der Dreyecke zweymal so hoch §. 76, als das Verhältniß ihrer Grundlinien, oder ihrer Höhen. (§. 481).

Tab. V. Wenn daher in den gleichgestreckten Vierecken ABCD, abcd fig 134. 135 die Grundlinien BC, bc sich eben so, wie die Höhen AE, ae verhalten, so stehen diese gleichgestreckte Vierecke in einem zweymal höherem Verhältniß als ihre Grundlinien, oder ihre Höhen. Ist daher das Verhältniß der Höhen AE : ae = m : n so ist auch, nach der Voraussetzung, das Verhältniß der Grundlinien wie m : n und das Verhältniß der gleichgestreckten Vierecke ABCD: abcd = $\binom{m:n}{m:n}$ = $m^2 : n^2$. Eben so verhält es sich mit den Dreyecken ABC, abc deren Höhen AE : ae eben das Verhältniß haben, wie ihre Grundlinien BC : bc.

Anmerkung. Da dieser Satz eben so bey Rechtecken gilt, und ordentliche Vierecke nichts anders als Rechtecke sind, deren Höhen den Grundlinien gleich sind, so folgt: daß ordentliche Vierecke in einem zweymal höheren Verhältniß als ihre Seiten stehen. Errichtet man daher auf die Grundlinien BC, bc, oder auf die Höhen AE, ac zweyer gleichgestreckten Vierecke ABCD, abcd, oder zweyer Dreyecke ABC, abc, deren Grundlinien sich eben so, wie die Höhen verhalten, ordentliche

Vier-

Vierecke, so werden diese in einem zweymal höheren Verhältniß als die Grundlinien oder als die Höhen stehen; und da die gleichgestreckten Vierecke, sowohl als die Dreyecke, auch in einem zweymal höheren Verhältniß dieser Grundlinien und Höhen stehen, so kann man sagen: **Gleichgestreckte Vierecke und Dreyecke, deren Grundlinien einerley Verhältniß mit den Höhen haben, verhalten sich eben so, wie ordentliche Vierecke, welche auf ihre Grundlinien, oder Höhen errichtet werden können.**

§. 271.

Wenn in zweyen gleichgestreckten Vierecken von gleichen Flächenräumen ein Winkel des einen, einem Winkel des andern gleich ist, so stehen die Seiten welche gedachte gleiche Winkel einschliessen, dergestalt im Verhältniß, daß, wenn die Seiten des einen gleichgestreckten Vierecks, zu äussern Glieder einer Verhältnißgleichung genommen werden, die Seiten des andern die mittlern Glieder derselben geben; und wenn umgekehrt die Seiten, welche die gleichen Winkel zweyer gleichgestreckten Vierecke einschliessen, sich so verhalten, daß die von dem einen die äussern, die von dem andern aber die mittlern Glieder einer Verhältnißgleichung

chung geben, so sind diese gleichgestreckten Vierecke einander gleich. (VI Prop. 14).

Tab. V. Wenn daher die Winkel B, b der beyden gleichgestreckten, und gleich großen Vierecken ABCD, abcd fig. 136. 137 einander gleich sind, so ist AB : ab = bc : BC oder ab : AB = BC : bc. Ist umgekehrt der Winkel C dem Winkel c gleich, und überdehm BC : bc = cd : CD oder bc : BC = CD : cd, so kann man daraus schliessen beyde gleichgestreckte Vierecke ABCD, abcd müssen gleich groß seyn.

§. 272.

Wenn in zweyen gleichen Dreyecken, ein Winkel des einen, einem Winkel des andern gleich ist, so stehen die Seiten, welche gedachte gleiche Winkel einschliessen, dergestalt im Verhältniß, daß die Seiten des einen die äussern, die Seiten des andern aber die mittlern Glieder einer Verhältnißgleichung geben; und wenn umgekehrt ein Winkel eines Dreyeckes, einem Winkel eines andern gleich ist, und überdehm die Seiten, welche die gleichen Winkel einschliessen, eine Verhältnißgleichung machen, so, daß die Seiten des erstern die äussern, die Seiten des andern aber, die mittlern Glieder sind, so sind beyde Dreyecke einander völlig gleich. (VI Prop. 15).

Wenn

Wenn demnach die Dreyecke ABC, abc Tab.V. fig. 136. 137 gleich sind, und die Winkel B, b in beyden sind gleich groß, so ist jederzeit AB : ab = BC : bc oder ab : AB = BC : bc. Ist aber ein Winkel BAC des ersten Dreyeckes einem Winkel bac des andern gleich, überdehm aber AB : ab = AC : ac oder ab : AB = AC : ac, so folgt umgekehrt, daß die Flächenräume beyder Dreyecke einander gleich seyn müssen.

§. 273.

In jedem rechtwinklichten Dreyecke ist ein ordentliches Viereck, auf der schiefen Seite desselben errichtet, beyden ordentlichen Vierecken, die auf den graden oder rechten Seiten gesetzt werden können, völlig gleich. (§. 483) (I Prop. 47).

Wenn daher das Dreyeck ACB fig. 138 Tab.V. bey C rechtwinklicht ist, und man errichtet, sowohl auf die schiefe Seite AB, das ordentliche Viereck c, als auf die beyden graden Seiten AC, CB die ordentliche Vierecke a und b: so ist das erste ordentliche Viereck, den beyden letzten zusammengenommen gleich, oder c = a + b.

§. 274.

Wenn auf den Seiten eines Dreyeckes sich ordentliche Vierecke dergestalt errichten lassen, daß zwey derselben; zusammengenommen dem dritten gleich sind:

so ist das Dreyeck rechtwinklicht, und die schiefe Seite desselben diejenige, auf welcher das größte ordentliche Viereck stehet. (I Prop. 48).

Tab. V. Wenn auf den Seiten AC, CB, AB eines Dreyeckes ACB fig. 138 sich drey ordentliche Vierecke a, b, c so verrichten lassen, daß zwey derselben a, b dem dritten c gleich sind, so ist das Dreyeck ACB rechtwinklicht, AB die schiefe Seite, und folglich ACB der rechte Winkel.

§. 275.

Aehnliche Dreyecke sind zu einander in zwiefach höherem Verhältniß ihrer gleichliegenden Seiten, oder in dem Verhältniß der auf diesen Seiten errichteten ordentlichen Vierecken. (§. 486) (VI Prop. 19).

Tab. IV. So stehen die ähnlichen Dreyecke ABC, abc fig 109 in einem zwiefach höherem Verhältniß ihrer gleichliegenden Seiten AB, ab; oder BC bc; oder AC, ac; und da ordentliche Vierecke, auf den Seiten AB, ab oder BC, bc oder AC, ac errichtet, auch in einem zwiefach höherem Verhältniß dieser Seiten stehen, so verhalten sich auch die Dreyecke ABC, abc eben so, wie die ordentliche Vierecke welche auf jedes Paar gleichliegender Seiten AB, ab, oder AC, ac oder BC, bc der Dreyecke ABC, abc errichtet werden können.

§. 276.

§. 276.

Aehnliche Vielecke sind zu einander in zwiefach höherem Verhältniß ihrer gleichliegenden Seiten, oder in eben dem Verhältniß der auf diesen Seiten errichteten ordentlichen Vierecken. (§. 487) (VI Prop. 20).

So haben die ähnlichen Vielecke ABCDEF, Tab. IV. abcdef fig. 113 ein zwiefach höheres Verhältniß als jedes Paar gleichliegender Seiten AB, ab; BC, bc; CD, cd; DE, de; EF, ef; FA, fa, dieser Vielecke. Stellet man sich aber, auf jedem Paare gleichliegender Seiten, ordentliche Vierecke errichtet vor, so verhalten sich die Vielecke gegeneinander eben so, wie die auf jedem Paare gleichliegender Seiten derselben, errichteten ordentlichen Vierecke.

Anmerkung. Ueberhaupt ist das Verhältniß ähnlicher Vielecke zweymal höher als zwo in denselben auf eben die Art liegenden graden Linien, diese mögen Querlinien der Figuren, oder sonst andere grade Linien seyn, wenn sie nur, in Rücksicht der Winkel und Seiten der Figuren, in beyden gleiche Lage haben. Woraus sogleich erhellet, daß dergleichen Vielecke sich auch, wie die auf solchen graden Linien errichtete ordentliche Vierecke verhalten werden.

§. 277.

Wenn von vier graden Linien zwo und zwo einerley Verhältniß gegeneinander haben: so haben auch zwo ähnliche Figuren auf dem ersten Paare dieser Linien errichtet, gegeneinander, eben das Verhältniß, wie zwo andere ähnliche Vielecke auf dem zweyten Paare errichtet; und wenn von vier Figuren, die auf vier graden Linien beschrieben worden, je zwo und zwo ähnlich sind, und einerley Verhältniß haben, so machen die vier graden Linien worauf sie stehen, eine Verhältnißgleichung. (IV Prop. 22).

Tab. V. Wenn daher die graden Linien AB, CD fig. 139 sich eben so, wie die graden Linien EF, GH fig. 140 verhalten, das ist, wenn AB: CD = EF: GH: so verhalten sich auch die zwey ähnliche Dreyecke, a, b, auf dem ersten Paare, dieser Linien errichtet, eben so, wie die ähnlichen Fünfecke, p, q, welche auf dem letzten Paare errichtet worden. Es ist nehmlich a : b = p : q. Sind hingegen zwey Dreyecke a, b ähnlich, und eben so zwey Fünfecke p und q, überdehm aber a : b = p : q, so ist auch AB: CD = EF: GH.

§. 278.

Wenn in zweyen gleichgestreckten Vierecken der Winkel des einen, dem Win-

Winkel des andern gleich ist: so sind diese gleichgestreckten Vierecke in zusammengesetztem Verhältniß ihrer Seiten. (VI Prop. 23).

Stellt man sich daher vor, daß in den Tab. V. gleichgestreckten Vierecken ABCD, abcd, fig. 136. 137 der Winkel B des einen, dem Winkel b des andern gleich ist, ohne wie oben dabey anzunehmen: die beyden gleichgestreckten Vierecke seyn auch gleich, oder ihre Seiten in einem gewissen Verhältniß: so folgt, bloß aus der Gleichheit dieser Winkel, daß diese Figuren in zusammengesetzten Verhältniß ihrer Seiten stehen müssen, nehmlich: ABCD : abcd $= \binom{AB:ab}{BC:bc} = AB.BC : ab.bc.$

Anmerkung. Eben dieser Satz lässet sich auch auf Dreyecke anwenden, wenn ein Winkel des einen, einem Winkel des andern gleich ist, nur mit der Einschränkung, daß die Dreyecke allein in zusammengesetztem Verhältniß derer Seiten stehen, welche die gleichen Winkel einschliessen.

§. 279.

Wenn ein gleichgestrecktes Viereck auf die Art wie oben §. 255 in verschiedene andere gleichgestrekte Vierecke ist zerfällt worden, so sind, von denselben, diejenigen, durch welche die Querlinie gehet, dem

ganzen und einander selbst ähnlich. (VI Prop. 24).

Tab. IV. So sind fig. 117 die beyden gleichgestreckten Vierecke GF, EH durch welche die Querlinie BD gehet, dem ganzen gleichgestreckten Viereck AC, davon sie Theile sind, und einander selbst ähnlich.

§. 280.

Wenn auf allen Seiten eines rechtwinklichten Dreyeckes, Vielecke beschrieben werden, die einander ähnlich sind: so ist dasjenige, welches auf der schiefen Seite des rechtwinklichten Dreyeckes stehet, den beyden andern ähnlichen Vielecken zusammengenommen gleich. (VI Prop. 31).

Tab. V. Wenn daher auf den Seiten AB, AC, CB eines rechtwinklichten Dreyeckes ABC fig. 141 beliebige, aber ähnliche Vielecke a, b, c beschrieben worden: so ist das Vieleck c, welches auf die schiefe Seite AB des rechtwinklichten Dreyeckes ABC errichtet ist, eben so groß, als die Vielecke a, b welche auf die beyden graden Seiten AC, CB dieses Dreyeckes stehen.

§. 281.

Alle ordentliche Figuren, die einander ähnlich sind, und ähnliche Theile derselben, stehen in einem zwiefach höherem Verhältniß der Halbmesser oder Durchmesser von den Kreisen, in welche,

oder

oder um welche die Figuren beschrieben worden; oder das Verhältniß solcher Figuren ist dem Verhältniß der ordentlichen Vierecke gleich, welche sich auf die Durchmesser oder Halbmesser von den Kreisen setzen lassen, in welche, oder um welche, die Figuren beschrieben worden. (§. 489).

So verhalten sich die ordentlichen Sechsecke ABCDEF, abcdef fig. 142. 143 wie die ordentlichen Vierecke CHIF, chif welche auf den Durchmessern CF, cf errichtet worden, oder auch wie die auf den Halbmessern CG, cg errichtete ordentliche Vierecke CLKG, clkg. Eben dieses würde so zu verstehen seyn, wenn statt den Kreisen, in welche die Sechsecke beschrieben worden, diejenigen genommen würden, die sich in die Figuren einschreiben lassen.

§. 282.

Das Verhältniß der Kreisflächen ist zwiefach höher als das Verhältniß der Halbmesser oder der Durchmesser derselben; oder Kreisflächen verhalten sich eben so, wie die auf ihren Halbmessern oder Durchmessern beschriebene ordentliche Vierecke. (§. 390).

So verhalten sich die Kreisflächen, deren Tab.V.
Mittelpunkte C, c sind, fig. 144. 145, wie die auf ihre Halbmesser AC, ac beschriebene ordentliche Vierecke AFGC, afgc, oder auch wie die auf

ihre

ihre Durchmesser AB, ab beschriebene ordentliche Vierecke ADEB, adeb.

§. 283.

Aehnliche Ausschnitte der Kreisflächen, haben ein zwiefach höheres Verhältniß, als ihre Halbmesser oder Sehnen; oder das Verhältniß ähnlicher Ausschnitte ist dem Verhältniß der ordentlichen Vierecke gleich, welche sich auf ihre Halbmesser oder auf ihre Sehnen errichten lassen. (§. 490).

Tab. V. So verhalten sich die ähnlichen Ausschnitte ACB, acb fig. 146. 147 wie die ordentlichen Vierecke CE, ce welche auf den Halbmessern CB, cb errichtet worden, oder auch wie die auf den Sehnen AB, ab dieser Ausschnitte errichtete ordentliche Vierecke AF, af.

§. 284.

Aehnliche Abschnitte stehen gegeneinander in einem zwiefach höherem Verhältniß ihrer Sehnen; oder das Verhältniß ähnlicher Abschnitte ist einerley mit dem Verhältniß der ordentlichen Vierecke welche auf den Sehnen der Abschnitte errichtet worden. (§. 490).

Tab. V. Wenn die Abschnitte A, a, fig. 148. 149 ähnlich sind, das will sagen: wenn die Winkel am Umkreise, AEB, aeb, so sich in beyden einschreiben lassen, gleich sind: so verhalten sich

diese

diese Abschnitte gegeneinander eben so, wie die auf den Sehnen AB, ab beschriebene ordentliche Vierecke ACDB, acdb.

§. 285.

Wenn in einer halben Kreisfläche, von einem beliebigen Punkt des Kreisbogens, nach dem Anfangs- und Endpunkt des Durchmessers zwo Sehnen gezogen werden, so bilden dieselben mit dem Durchmesser ein Dreyeck; beschreibet man nun über jede der beyden Sehnen von neuem eine halbe Kreisfläche, so entstehen ausserhalb derjenigen, welche über den Durchmesser beschrieben worden, zwey krummlinigte Figuren von mondförmiger Gestalt, welche beyde zusammengenommen dem Dreyecke gleich sind, welches die Sehnen mit dem Dnrchmesser des gegebenen Halbkreises einschliessen. (§. 496).

Wenn in der halben Kreisfläche ADBECA Tab. V. fig. 150 zwo Sehnen AB, BC gezogen werden, so entsteht das Dreyeck c; beschreibet man nun über die Sehnen AB, BC die halben Kreisflächen, AFBA, BGCB, so entstehen ausserhalb der halben Kreisfläche ADBECA die krummlinigte Figuren a, b von mondenförmiger Gestalt, welche beyde zusammengenommen, dem Dreyecke c völlig gleich sind.

§. 286.

Wenn zwo grade Linien gleichlaufen, so fallen alle gerade Linien, welche von der einen an die andern laufen, in die Ebene in welcher die gleichlaufenden Linien liegen. (§. 500) (XI Prop. 7).

Tab. V. Wenn daher die graden Linien AB, CD fig. 151 gleichlaufen, und man hat durch dieselben die Ebene des Papieres gelegt, zieht nun von der einen bis zur andern die graden Linien EF, FG, GH, HI so fallen diese sämmtlich in die Ebene welche durch die gleichlaufenden Linien AB, CD gehet, folglich hier in die Ebene des Papieres.

§. 287.

Alle Ebenen, welche man durch drey Punkte leget, die nicht in grader Linie liegen, fallen zusammen. (§. 501).

Sobald demnach eine Ebene durch drey solcher Punkte geht, die in einer andern Ebene liegen, so weichen beyde Ebenen von einander nicht wieder ab, man mag sie erweitern wie man will, oder beyde Ebenen sind nur eine und dieselbe Ebene.

§. 288.

Zwo Ebenen können einander nur in einer graden Linie schneiden, oder der Durch-

Durchschnitt zwoer Ebenen ist eine grade Linie. (§. 502) (XI Prop. 3).

Der Durchschnitt A D der beyden Ebenen AB, AC fig. 42 ist daher jederzeit eine grade Linie. Tab. II.

§. 289.

Eine grade Linie, welche ausserhalb einer Ebene liegt, und mit einer in der Ebene liegenden graden Linie gleichläuft, ist mit der Ebene selbst, und mit jeder andern in der Ebene liegenden graden Linie gleichlaufend, welche mit der zuerst darinn angenommenen Linie gleichlaufend gezogen werden kann. (§. 504).

Wenn AB ausserhalb der Ebene GH fig. 152 liegt, aber mit einer in der Ebene GH liegenden graden Linie CD gleichlaufend ist, so ist AB mit der Ebene GH selbsten gleichlaufend. Zieht man nun in der Ebene eine beliebige andere grade Linie EF, mit der erstern CD gleichlaufend, so ist auch AB mit der graden Linie EF gleichlaufend. Tab. V.

§. 290.

Zwo grade Linien die mit einer dritten gleichlaufen, sind auch in dem Fall gleichlaufend, wenn gleich nicht alle drey Linien in einer und derselben Ebene liegen. (§. 505) (XI Prop. 9).

Tab. V. Wenn daher die graden Linien CD, AB fig. 152 mit einer dritten graden Linie EF gleichlaufend sind, so sind sie auch untereinander selbst gleichlaufend, obgleich die grade Linie AB mit den beyden andern CD, EF nicht in einerley Ebene GH lieget.

§. 291.

Wenn eine grade Linie auf zwoen in einer Ebene liegenden graden Linien senkrecht steht, so stehet sie auch auf der Ebene selbst senkrecht. (§. 507) (XI Prop. 4).

Tab. II. Weis man daher daß die grade Linie AB fig. 41 auf zwoen in der Ebene FG liegenden graden Linien EB, BD in B senkrecht steht, so kann man behaupten AB stehe auf der Ebene FG selbsten senkrecht, und mache mit jeder andern graden Linie, welche durch den Punkt B, in der Ebene FG, wie BC, gezogen worden, rechte Winkel.

§. 292.

Von einem in einer Ebene liegenden Punkt kann nur eine einzige grade Linie auf der Ebene senkrecht errichtet werden, alle andere grade Linien, welche gegen die Ebene fallen, und durch eben diesen Punkt gehen, stehen schief auf dieselbe. (§. 508).

So kann in dem Punkte B der Ebene F G Tab. V. fig. 153 nur die einzige grade Linie A B senkrecht errichtet werden, denn alle andere grade Linien, wie B C, B D, B E, welche gegen die Ebene fallen, und durch eben den Punkt B gehen, stehen schief auf der Ebene F G.

§. 293.

Von einem Punkte ausserhalb einer Ebene kann nur eine einzige grade Linie gegen die Ebene senkrecht gezogen werden, alle andere grade Linien, welche durch eben den Punkt nach der Ebene laufen, treffen dieselbe schief. (§. 509).

So läßt sich von dem Punkte A der auſſer- Tab. V. halb der Ebene F G fig. 154 liegt, nicht mehr als die einzige grade Linie A B senkrecht ziehen, alle andere grade Linien A C, A D, A E, welche durch eben den Punkt A laufen, treffen verlängert, die Ebene F G schief.

§. 294.

Wenn zwo grade Linien einen Winkel einschlieſſen, so kann man immer durch die Schenkel dieses Winkels eine Ebene legen: wird nun auſser der Ebene dieses Winkels ein beliebiger Punkt angenommen, und durch denselben zwo graden Linien mit den Schenkeln des gedachten Winkels gleichlaufend gezogen: so schlieſſen dieselben einen Winkel ein, der denje-

nigen völlig gleich ist, welchen die zwo gegebene graden Linien einschliessen. (§. 510) (XI Prop. 10).

Tab. V. So kann man immer durch die Schenkel AB, AC des Winkels BAC fig. 155 eine Ebene DE legen; und wenn ausserhalb der Ebene DE dieses Winkels, über oder unter derselben, ein beliebiger Punkt a angenommen wird, und man ziehet durch denselben die graden Linien ab, ac, die erste mit AB, die andere mit AC gleichlaufend, so ist der Winkel cab dem Winkel CAB völlig gleich.

§. 295.

Wenn eine grade Linie auf einer Ebene senkrecht stehet, und man leget durch diese grade Linie eine andere beliebige Ebene, so wird die Neigung beyder Ebenen §. 81 gegeneinander, durch einen rechten Winkel bestimmt, oder die eine Ebene steht auf der andern senkrecht; und wenn umgekehrt zwo Ebenen sich senkrecht schneiden, so fällt auch jede grade Linie, welche in der einen beyder Ebenen, auf den Durchschnitt senkrecht gezogen worden, auf die andere Ebene senkrecht. (§. 514) (XI Prop. 13).

Tab. V. Wenn die grade Linie AB fig. 156 auf der Ebene FG senkrecht stehet, und man leget durch dieselbe eine beliebige Ebene CD, so wird der Neigungswinkel ABE beyder Ebenen ein rech-

ter,

ter, oder die Ebene CD stehet auf die Ebene FG senkrecht. Wenn aber umgekehrt zwo Ebenen CD, FG sich in CB senkrecht schneiden, und man ziehet in der einen Ebene CD die grade linie AB auf den Durchschnitt CB senkrecht, so stehet eben diese linie AB auch auf der andern Ebene FG senkrecht. Eben so stehet eine grade linie BE, welche in der Ebene FG auf den Durchschnitt CB senkrecht gezogen worden, auch auf der andern Ebene CD senkrecht.

§. 296.

Wenn eine grade Linie auf eine Ebene senkrecht fällt: so stehen alle andere grade Linien, welche mit der senkrechten gleichlaufen, auf der nehmlichen Ebene senkrecht; und umgekehrt sind alle grade Linien, welche auf eine Ebene senkrecht fallen, untereinander gleichlaufend. (§. 515. 516) (XI Prop. 6. 8).

So stehen die graden linien, CD, EF, fig. 157, welche mit der auf der Ebene GH gezogenen senkrechten linie AB gleichlaufen, auf dieser Ebeue GH senkrecht; und wenn die graden linien AB, CD, EF auf der Ebene GH senkrecht stehen, so kann man behaupten, sie müssen unter einander gleichlaufen. Tab. V.

§. 297.

Wenn zwo sich schneidenden Ebenen auf irgend einer andern Ebene senkrecht

stehen: so ist auch der Durchschnitt der schneidenden Ebenen auf der nehmlichen Ebene senkrecht. (§. 517) (XI Prop. 19).

Tab. V. Wenn daher die Ebenen CK, LN fig. 158 einander in AB schneiden, und beyde auf der Ebene GE senkrecht stehen, so ist auch ihr Durchschnitt AB auf dieser Ebene GE selbsten senkrecht.

§. 298.

Wenn eine grade Linie auf zwoen Ebenen zugleich senkrecht gestellt werden kann, so sind die Ebenen untereinander gleichlaufend. (§. 519) (XI Prop. 14).

Tab. VI. So sind die Ebenen EF, GH fig. 159 gleichlaufend, wenn auf beyde zugleich die grade Linie AC oder BD senkrecht gezogen werden kann.

§. 299.

Wenn zwo gleichlaufende Ebenen, durch eine dritte Ebene willkührlich geschnitten werden: so sind die Durchschnitte, welche hierdurch entstehen, gleichlaufend. 520) (XI Prop. 16).

Tab. VI. Wenn demnach die beyden Ebenen EF, GH fig. 159 miteinander gleichlaufen, und man schnitt beyde mit einer dritten Ebene ACDB in den graden Linien AB, CD, so sind diese Durchschnitte, AB, CD, weil sie in den

gleich=

gleichlaufenden Ebenen EF, GH liegen, auch selbsten gleichlaufend.

§. 300.

Wenn zwo grade Linien, die einander schneiden, mit zwoen andern graden sich schneidenden Linien gleichlaufen, aber mit denselben nicht in der nehmlichen Ebene liegen: so sind zwo Ebenen, davon die erste durch das eine, und die zwote durch das andere Paar sich schneidender Linien gehen, miteinander gleichlaufend. (§. 521) (XI Prop. 15).

Wenn die graden Linien AB, AC fig. 160 Tab. VI. welche sich in A schneiden, mit den graden Linien, ab, ac, welche in a zusammentreffen, gleichlaufend sind, und man lieget durch das erste Paar AB, AC die Ebene DE, durch das andere Paar ab, ac aber die Ebenen FG: so sind die beyden Ebenen DE, FG miteinander gleichlaufend.

§. 301.

Wenn zwo grade Linien durch mehrere gleichlaufende Ebenen geschnitten werden: so werden diese grade Linien in einerley Verhältniß eingetheilet. (§. 522) (XI Prop. 17).

Werden daher die graden Linien AC, DF Tab. VI. fig. 161 durch die drey gleichlaufenden Ebenen

GH, IK, LM in A, B, C und D, E, F geschnitten, so ist

1) AB : AC = DE : DF
2) BC : AC = EF : DF
3) AB : BC = DE : EF

§. 302.

Wenn eine eckigte Säule §. 83 durch eine Ebene geschnitten wird, welche mit den Grundflächen derselben gleichläuft, so ist die Figur des Durchschnittes den Grundflächen gleich und ähnlich.

Tab. VI. So ist der Durchschnitt, bdfhk, fig. 162 welcher entsteht, indem die eckigte Säule, ABF EIK, durch eine mit den Grundflächen ACE GI, BDFHK, gleichlaufende Ebene geschnitten wird, eine Figur, welche den Grundflächen, ACEGI, BDFHK, gleich und ähnlich ist.

§. 303.

Wenn ein gleichgestreckter Pfeiler §. 86 mit einer Ebene geschnitten wird, welche durch die Querlinien zwoer gegenüberstehenden Grund- oder Seitenflächen desselben gehet: so wird derselbe in zwoen gleichen dreyseitigen eckigten Säulen zertheilet. (XI Prop. 28).

Tab. VI. Wird daher der gleichgestreckte Pfeiler ABFE fig. 163 durch eine Ebene GHDC, welche durch die Querlinien, GC, HD, zwoer gegenüberstehenden Flächen, ACEG, BDFH, gehet,

gehet, geschnitten: so sind die hierdurch entstehende dreyseitige eckigte Säulen, ACGHDB, CEGHFD, einander völlig gleich.

§. 304.

Gleichgestreckte Pfeiler, und eckigte Säulen, welche auf gleichen Grundflächen, zwischen zwoen gleichlaufenden Ebenen stehen, sind einander völlig gleich. (§. 538) (XI Prop. 31).

Wenn der gleichgestreckte Pfeiler, AacC, Tab. VI. fig. 164 mit der eckigten Säule, Fiil, zwischen den zwoen gleichlaufenden Ebenen KL, MN eingeschloßen ist, und die Grundflächen ABCD, abcd des gleichgestreckten Pfeilers, sind den Grundflächen EFGHI, efghi der eckigten Säule gleich, so sind beyde Körper gleich groß.

Anmerkung. Die Entfernung der einen Ebene KL welche mit der andern MN gleichlaufend ist, wird die Höhe der Körper genannt, welche zwischen diesen Ebenen eingeschloßen sind. Man kann daher hier auch kürzer sagen: **gleichgestreckte Pfeiler und eckigte Säulen sind einander völlig gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.** Uebrigens erhellet daß man eine jede eckigte Säule in einen gleichgestreckten graden Pfeiler von gleichem körperlichen Raum verwandeln, oder sich wenigstens ver-

verwandelt, vorstellen könne. Denn wenn die Grundfläche der eckigten Säule in ein gleichgestrecktes Viereck von gleichem Flächenraume verwandelt wird, und man errichtet auf dasselbe, einen gleichgestreckten graden Pfeiler, eben so hoch als die eckigte Säule, so ist diese dadurch in jenen verwandelt, ohne daß ihr körperlicher Raum durch diese Verwandlung im mindesten verändert worden.

§. 305.

Gleichgestreckte Pfeiler und eckigte Säulen deren Grundflächen gleich sind, verhalten sich wie die Höhen dieser Körper. (§. 542).

Tab. VI. Wenn die eckigten Säulen ABCabc, DEFGHdefgh, fig. 165 gleiche Grundflächen ABC, DEFGH haben, so verhalten sie sich wie ihre Höhen CL, FM. Setzt man daher den körperlichen Raum der ersten eckigten Säule = P, der andern = Q, so ist P : Q = CL : FM. Eben so ist dieses von gleichgestreckten Pfeilern zu verstehen.

§. 306.

Gleichgestreckte Pfeiler, und eckigte Säulen deren Höhen gleich sind, verhalten sich wie ihre Grundflächen. (§. 543) (XI Prop. 32).

Wenn

Wenn die eckigten Säulen ABCDE Tab. VI. abcde, FGHfgh fig. 166 gleiche Höhen CK, FL haben, so verhalten sie sich wie die Grundflächen ABCDE, FGH. Setzt man daher den körperlichen Raum der einen eckigten Säule = P, der andern = Q, so ist P : Q = ABCDE : FGH. Eben so ist dieses von gleichgestreckten Pfeilern zu verstehen.

§. 307.

Gleichgestreckte Pfeiler und eckigte Säulen, stehen überhaupt in einem Verhältniß, welches aus den Verhältnißen der Grundflächen, und der Höhen der Körper zusammengesetzt ist. (§. 544).

So ist das Verhältniß der eckigten Säule ACEGIBDFHK fig. 162 zum gleichgestreckten Pfeiler AEFB fig. 163 aus dem Verhältniß der Grundflächen BDFHK, BDFH und aus dem Verhältniß der Höhen EL, LM der beyden Körper zusammengesetzt. Setzt man daher den körperlichen Raum der eckigten Säule = P, ihre Grundfläche = B, und ihre Höhe = H; hingegen den körperlichen Raum des gleichgestreckten Pfeilers = p, seine Grundfläche = b, und seine Höhe = h so ist

$$P : p = \begin{pmatrix} B : b \\ H : h \end{pmatrix} = B . H : b . h.$$

Eben so ist dieses zu verstehen, wenn gleichgestreckte Pfeiler oder eckigte Säulen miteinander zu vergleichen sind.

§. 308.

§. 308.

Rechtwinklichte gleichgestreckte Pfeiler §. 87 stehen in einem Verhältniß, welches aus dreyen Verhältnißen zusammengesetzt ist, nehmlich aus den beyden Verhältnißen der Seiten ihrer Grundflächen, und aus dem Verhältniß ihrer Höhen. (§. 546).

Tab. VI. Wenn die beyden Körper ACca, EGge fig. 167 rechtwinklichte gleichgestreckte Pfeiler sind, und man nennet den körperlichen Raum des ersten P des andern Q, so ist $P : Q = \begin{pmatrix} AB : EF \\ BC : FG \\ Aa : Ee \end{pmatrix} = AB . BC . Aa : EF . FG . Ee.$

Anmerkung. Da AB, BC, Aa die verschiedenen Seitenlinien des einen, EF, FC, Ee aber, die verschiedenen Seitenlinien des andern rechtwinklichten gleichgestreckten Pfeilers sind, so ist auch das Verhältniß rechtwinklichter gleichgestreckter Pfeiler aus den Verhältnißen ihrer verschiedenen Seitenlinien zusammengesetzt.

§. 309.

Das Verhältniß der Würfel ist dreymal so hoch als das Verhältniß ihrer Seiten. (§. 547).

Tab. VI. Stellt man sich daher die rechtwinklichten gleichgestreckten Pfeiler ACca, EGge fig. 167 als Würfel vor, so wird BC = AB, Aa = AB,

AB, FG = EF, Ee = EF folglich BC : FG = AB : EF, Aa : Ee = AB : EF und P : Q = $\begin{pmatrix} AB : EF \\ AB : EF \\ AB : EF \end{pmatrix}$ = $AB^3 : EF^3$.

Ist daher das Verhältniß der Seiten zweyer Würfel = m : n so ist das Verhältniß der Körper selbst = $m^3 : n^3$.

§. 310.

Wenn die Grundflächen zwoer eckigten Säulen oder gleichgestreckten Pfeilern ähnliche Figuren sind, so stehen die Körper in ein Verhältniß, welches aus dem doppelten Verhältniß zwoer gleichliegenden Seiten der Grundflächen, und aus dem Verhältniß der Höhen der Körper zusammengesetzt ist. (§. 548).

Wenn die Grundflächen ABCDE, abcde Tab. VI. fig. 168 ähnliche Figuren sind, und man nennt den körperlichen Raum der ersten eckigten Säule P der andern p so ist P : p = $\begin{pmatrix} AB^2 : ab^2 \\ CL : cl \end{pmatrix}$ = $AB^2 . CL : ab^2 . cl = BC^2 . CL : bc^2$ cl u. s. w.

Eben so ist dieses von gleichgestreckten Pfeilern zu verstehen wenn statt den Vielecken ABCDE, abcde ähnliche gleichgestreckte Vierecke zu Grundflächen genommen werden.

§. 311.

Wenn die Grundflächen zwoer eckigten

ten Säulen, oder gleichgestreckter Pfeiler, ähnliche Figuren sind, und die Höhen dieser Körper verhalten sich wie jedes Paar gleichliegender Seiten der Grundflächen: so stehen diese Körper in einem dreymal so hohen Verhältniß, als jedes Paar gleichliegender Seiten der Grundflächen, oder als die Höhen der Körper. (§. 550) (XI Prop. 33).

Tab. VI. Wenn man setzt die Grundfläche ABCDE fig. 168 sey der Grundfläche abcde ähnlich, und überdehm CL : cl = AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : ea so ist auch P : p = CL^3 : cl^3 = AB^3 : ab^3 = BC^3 : bc^3 u. s. w.

Anmerkung. Stellet man sich daher zwey Würfel vor, deren Seiten sich gegeneinander wie zwo gleichliegende Seiten der Grundflächen, oder wie die Höhen der Körper fig. 168 verhalten, so haben diese Würfel einerley Verhältniß wie die Körper P, p; denn auch das Verhältniß der Würfel ist gleich dem Verhältniß CL^3 : cl^3 = AB^3 : ab^3 = BC^3 : bc^3. u. s. w.

§. 312.

Gleichgestreckte Pfeiler und eckigte Säulen sind einander gleich, wenn ihre Höhen sich umgekehrt, wie ihre Grundflächen verhalten; und hinwiederum verhalten sich die Grundflächen solcher Körper

per, welche gleich groß sind, umgekehrt wie ihre Höhen. (§. 553. 554) (XI Prop. 34).

Wenn die Höhen CK, FL zwoer eckigten Säulen ABCDEabcde, FGHfgh fig. 166 sich umgekehrt wie die Grundflächen AB CDE, abcde verhalten, so ist P = Q. Nimmt man hingegen P = Q an, so folgt umgekehrt CK : FL = FGH : ABCDE. Tab. VI.

§. 313.

Wenn eine Spitzsäule §. 92 mit einer Ebene geschnitten wird, die mit der Grundfläche gleichläuft, so ist der Durchschnitt eine Figur, welche der Grundfläche ähnlich ist. (§. 561).

Schnitt man daher die Spitzsäule ABCDEF fig. 169 mit einer der Grundfläche BC DEF gleichlaufenden Ebene, so ist der Durchschnitt bcdef eine der Grundfläche BCDEF ähnliche Figur. Tab. VI.

§. 314.

Das Verhältniß des Durchschnittes einer Spitzsäule, welche mit der Grundfläche gleichlaufend ist geschnitten worden, zur Grundfläche, ist doppelt so hoch, als das Verhältniß der Entfernung des Schnittes von der Spitze, zur Entfernung der Grundfläche von eben dieser Spitze, in der nehmlichen Seitenlinie gerechnet. Oder das Verhältniß des

Durchschnittes zur Grundfläche, ist einerley mit dem Verhältniß ordentlicher Vierecke, so auf den Entfernungen des Schnittes und der Grundfläche von der Spitze, in jeder beliebigen aber nehmlichen Seitenlinie genommen, errichtet werden können. (§. 562).

Tab. VI. So ist fig. 169 bcdef : BCDEF = Ab² ; AB² = Ac² : AC² = Ad² : AD² u. s. w. Oder die Figur bcdef hat zur Figur BCDEF eben das Verhältniß, wie ein ordentliches Viereck, auf Ab, zu ein ordentliches Viereck, auf AB errichtet. Eben so ist dieses zu verstehen, wenn statt Ab, AB andere Seitenlinien Ac, AC oder Ad, AD genommen werden.

§. 315.

Ein jeder Schnitt so mit der Grundfläche eine Spitzsäule gleichlaufend ist gemacht worden, schnitt von derselben eine Spitzsäule ab, welche der ganzen ähnlich ist.

Tab. VI. So ist die, durch den mit der Grundfläche BCDEF gleichlaufenden Schnitt, bcdef fig. 169, abgeschnittene Spitzsäule Abcdef der ganzen ABCDEF ähnlich.

§. 316.

Alle Spitzsäulen welche zwischen einerley gleichlaufenden Ebenen eingeschlossen

schlossen sind, und auf gleichen Grundflächen stehen, sind einander gleich.

Wenn die Spitzsäulen ABCDE, FGHI Tab. VI. KL fig. 170 zwischen einerley gleichlaufenden Ebenen OP, MN eingeschlossen sind, und auf gleichen Grundflächen BCDE, GHIKL stehen, so sind beyde Körper einander völlig gleich.

Anmerkung. Da auch hier die Entfernung der beyden gleichlaufenden Ebenen, davon die eine durch die Spitzen, und die andere durch die Grundflächen der beyden Spitzsäulen gehet, die Höhe dieser Körper genannt wird, so kann man den letzten Satz kürzer ausdrücken, wenn man sagt: **Spitzsäulen sind einander gleich, wenn ihre Höhen und Grundflächen gleich sind.**

§. 317.

Eine eckigte Säule ist dreymal so groß als eine Spitzsäule, welche mit der eckigten Säule gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat. (§. 567) (XII Prop. 7).

Wenn die Spitzsäule ABCDE mit der Tab. VI. eckigten Säule GHIKLMNO fig. 171 gleiche Grundfläche BCDE = GHIK und gleiche Höhe AF = OP hat: so ist die Spitzsäule ABCDE genau der dritte Theil der eckigten Säule GHIKLMNO, oder diese ist dreymal so groß als jene.

§. 318.

Spitzsäulen von gleichen Grundflächen verhalten sich, wie die Höhen dieser Körper. (§. 569).

Tab. VI. Wenn die Spitzsäulen ABCDEF, ABCDE fig. 169. 171 gleiche Grundflächen BCDEF = BCDE haben, so verhalten sich diese Körper eben so wie die Höhen AG, AF derselben.

§. 319.

Spitzsäulen von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen. (§. 569) (XII Prop. 6).

Wenn die Spitzsäulen ABCDEF, ABCDE fig. 169. 170 gleiche Höhen AG, AF haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundflächen BCDEF, BCDE.

§. 320.

Spitzsäulen stehen überhaupt in einem Verhältniße, welches aus den Verhältnissen der Höhen, und der Grundflächen dieser Körper zusammengesetzt ist. (§. 569).

Tab. VI. So stehen die beyden Spitzsäulen ABCDE, ABCDE fig. 170. 171 in zusammengesetzten Verhältniß der Grundflächen BCDE, BCDE und der Höhen AF, AF dieser beyden Körper. Setzt man daher die Grundfläche des ersten =

B,

B, des andern = b; die Höhe des ersten = H, des andern = h; den körperlichen Raum des ersten = P, des andern = p, so ist : P : p = $\binom{B : b}{H : h}$ = B . H : b . h.

§. 321.

Wenn zwo Spitzsäulen einander gleich sind, so verhalten sich ihre Grundflächen umgekehrt wie ihre Höhen; und wenn bey zwoen Spitzsäulen die Grundflächen sich umgekehrt wie die Höhen verhalten: so sind sie einander gleich. (XII Prop. 9).

Wenn man die beyden Spitzsäulen A B C D E, A B C D E fig. 170. 171 von gleicher Größe annimmt, und die im vorigen §. gebrauchten Benennungen beybehält, so ist, weil P = p, auch B : b = h : H. Setzt man hingegen es verhalte sich bey diesen Körpern B : b = h : H, so folgt hinwiederum es müsse P = p seyn. Tab. VI.

§. 322.

Aehnliche Spitzsäulen stehen gegeneinander in einem dreymal so hohen Verhältniß, als jedes Paar gleichliegender Seiten dieser Körper. (XII Prop. 8).

Da ein Schnitt b c d e f so mit der Grundfläche B C D E F einer Spitzsäule A B C D E F fig. 169 gleichläuft, immer eine ähnliche Spitzsäule A b c d e f abschnitt, so verhält sich die ganze Spitzsäule A B C D E F zur abgeschnitte- Tab. VI.

nen Abcdef = AB³ : Ab³ = AC³ : Ac³ = AD³ : Ad³ = AE³ : Ae³ = AF³ : Af³ = BC³ : bc³ = CD³ : cd³ = DE³ : de³ = EF³ : ef³ = FB³ : fb³.

Anmerkung. Wenn wir den nach dem Schnitt übrigbleibenden Körper bcdef FEDCB eine abgekürzte Spitzsäule nennen, und seinen körperlichen Raum = Q setzen, so lässet sich derselbe, sowohl mit der ganzen Spitzsäule, ABCDEF, deren körperlichen Raum wir = P annehmen, als mit der abgeschnittenen Abcdef, deren körperlichen Raum wir = p setzen, folgendermaßen vergleichen.

Da P : p = AB³ : Ab³ so ist nach §. 215 N°. 3. 4

P — p : P = AB³ — Ab³ : AB³ und

P — p : p = AB³ — Ab³ : Ab³.

Da nun P — p = Q so ist auch

Q : P = AB³ — Ab³ : AB³ und

Q : p = AB³ — Ab³ : Ab³.

Es versteht sich übrigens von selbsten daß hier statt den Seiten AB, Ab jedes andere Paar gleichliegender Seiten als AC, Ac; AD, Ad u. s. w. oder BC, bc; CD, cd u. s. w. der ähnlichen Spitzsäulen ABCDEF und Abcdef genommen werden können.

§. 323.

Wenn eine runde Säule §. 89 mit einer

ner Ebene den Grundflächen gleichlaufend geschnitten wird: so ist der Durchschnitt eine Kreisfläche, welche den Grundflächen gleich ist. (§. 535).

Wird daher die runde Säule ABCDEFA Tab. VI. fig. 172 mit einer Ebene den Grundflächen BGDH, AE gleichlaufend geschnitten, so ist der Durchschnitt bgdh eine Kreisfläche welche den Grundflächen BGDH, und AE völlig gleich ist.

§. 324.

Runde Säulen sind sowohl unter sich als an eckigten Säulen gleich, mit denen sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben. (§. 538).

Wenn daher die beyden runden Säulen, Tab. VI. ABCDEFA, ABCDEFA fig. 172. 173, davon die eine eine schiefe, die andere aber eine grade ist, gleiche Grundflächen BGDH = BGDH und gleiche Höhen EM = FC haben, so sind beyde Körper einander völlig gleich. Und eben so würde, eine jede dieser runden Säulen, der eckigten Säule DEFGHdefgh fig. 165 gleich seyn, wenn jede der Grundflächen BGDH, der runden Säulen, der Grundfläche defgh der eckigten Säule, und jede der Höhen EM und FC der erstern, der Höhe FM der letztern gleich wäre.

Anmerkung. Da eine jede Kreisfläche, nach §. 268 sich leicht in ein Dreyeck verwandeln läßt, welches mit der Kreisfläche gleichen Flächenraum hat: so ist es leicht jede runde Säule in eine dreyseitige eckigte Säule von gleichem körperlichen Raum zu verwandeln, oder wenigstens sich die Möglichkeit dieser Verwandlung deutlich vorzustellen. Denn gedenket man sich, auf die in ein Dreyeck verwandelte Kreisfläche, eine dreyseitige eckigte Säule eben so hoch als die runde Säule, so sind beyde Körper einander gleich.

§. 325.

Runde Säulen von gleichen Grundflächen verhalten sich gegeneinander, und zu eckigten Säulen, die mit ihnen gleiche Grundflächen haben, wie die Höhen. (§. 542) (XII Prop. 14).

Tab. VI. Wenn die runden Säulen A B D E A, a c h e a fig. 172. 174 gleiche Grundflächen B G D H, a b c d haben, so verhalten sich diese Körper wie ihre Höhen É M, g k. Und wenn eine eckigte Säule L N H K fig. 171 mit einer runden Säule a c h e fig 174 gleiche Grundfläche hat: so verhält sich auch die eckigte Säule zur runden, wie die Höhe O P der ersten zur Höhe g k der andern.

§. 326.

§. 326.

Runde Säulen von gleicher Höhe stehen gegeneinander in einem zweymal so hohlem Verhältniß als die Durchmesser ihrer Grundflächen. Runde Säulen aber verhalten sich zu eckigten Säulen von gleicher Höhe, eben so, wie die Grundflächen der runden Säulen sich zu den Grundflächen der eckigten verhalten. (§. 543) (XII Prop. 11).

Wenn die Höhe DE der runden Säule ABDC fig. 175 der Höhe g k der runden Säule ache fig. 174 gleich ist, so hat man ABDC : ache = $\binom{AB : ac}{AB : ac} = AB^2 : ac^2$. Tab. VI.

Ist aber die Höhe DE der runden Säule ABCD fig. 175 gleich der Höhe FM der eckigten Säule DdfF fig. 165, so verhält sich die runde Säule ABDC zur eckigten DdfF, wie die Grundfläche AB der runden Säule, zur Grundfläche defgh der eckigten Säule.

§. 327.

Runde Säulen stehen gegeneinander in einem Verhältniß, welches aus einem Verhältniß, das zweymal so hoch ist als das Verhältniß der Durchmesser ihrer Grundflächen, und aus dem Verhältniß der Höhen dieser Körper; zusammengesetzet ist. Das Verhältniß eckigter Säulen zu runden hingegen, ist aus

den Verhältnissen der Grundflächen und der Höhen dieser Körper zusammengesetzt. (§. 544. 549).

Tab. VI. So verhält sich die runde Säule A B D E fig. 172 zur runden Säule A B D C fig. 175 wie das Verhältniß $BD^2 : AB^2$ mit dem Verhältniß der Höhen EM : DE zusammengesetzt, oder wie $BD^2 . FM : AB^2 . DE$. Hingegen ist das Verhältniß der runden Säule A B D E fig. 172 zur eckigten Säule A H K B fig. 168 aus dem Verhältniß der Grundflächen B G D H : F G H I K und aus dem Verhältniß der Höhen EM : CL zusammengesetzt.

§. 328.

Aehnliche runde Säulen §. 100 stehen gegeneinander in einem dreymal so hohen Verhältniß als die Durchmesser ihrer Grundflächen. (§. 551) (XII Prop. 12).

Tab. II. So verhält sich die runde Säule c d e f fig. 52 zu der ihr ähnlichen runden Säule C D E F fig. 47 wie $\begin{pmatrix} de : DE \\ de : DE \\ de : DE \end{pmatrix} = de^3 : DE^3$. Und man kann sich kürzer ausdrücken, wenn man sagt: Aehnliche runde Säulen verhalten sich gegeneinander, wie die Würfel der Durchmesser ihrer Grundflächen.

§. 329.

Wenn runde Säulen einander gleich sind,

sind, so verhalten sich die Grundflächen derselben umgekehrt wie die Höhen. Sind hingegen die Grundflächen runder Säulen in einem Verhältniß welches umgekehrt, dem Verhältniß ihrer Höhen gleich ist, so sind die runden Säulen selbst einander gleich. (§. 553. 554) (XII Prop. 15).

Wenn die runden Säulen P, p fig. 176 einander gleich sind, und man drückt die Grundfläche der ersten durch B, der andern durch b, die Höhe der ersten durch H, der andern durch h aus, so muß b : B = H : h. Findet hingegen bey dergleichen Körpern die Verhältnißgleichung b : B = H : h statt, so kann man umgekehrt behaupten es müsse : P = p seyn. Eben so ist dieses zu verstehen, wenn eine eckigte Säule einer runden gleich ist. Tab. VI.

§. 330.

Wenn ein Kegel §. 93 mit einer Ebene der Grundfläche gleichlaufend geschnitten wird, so ist der Durchschnitt eine Kreisfläche. (§. 563). Tab. VI.

So entsteht die Kreisfläche bc, wenn der Kegel ABC fig. 177 mit einer der Grundfläche BC gleichlaufenden Ebene geschnitten wird.

§. 331.

Das Verhältniß eines, mit der Grund-

Grundfläche des Kegels, gleichlaufenden Durchschnittes desselben, zur Grundfläche, ist zweymal so hoch als das Verhältniß der Entfernung des Schnittes von der Spize des Kegels, zur Entfernung der Grundfläche von eben der Spize, in jeder beliebigen graden Linie genommen, welche von der Spize des Kegels nach irgend einem Punkt des Umkreises der Grundfläche läuft. Oder eben dieses Verhältniß, ist zweymal so hoch, als das Verhältniß der Durchmesser des Durchschnittes und der Grundflächedes Kegels. (§. 563).

Tab.VI. Wenn der Durchschnitt b′ mit der Grundfläche B′ des Kegels A B C fig. 177 gleichlaufend ist gemacht worden, so ist

$$b' : B' = Ab^2 : AB^2 = Ac^2 : AC^2 = bc^2 : BC^2.$$

§. 332.

Ein jeder Schnitt in einem Kegel welcher mit der Grundfläche gleichlaufend ist gemacht worden, schnitt von dem Kegel einen kleinern Kegel ab, der dem ganzen ähnlich ist.

Tab.VI. So ist der, durch den mit der Grundfläche BC gleichlaufenden Schnitt bc, von dem Kegel ABC, fig. 177 abgeschnittene kleinere Kegel Abc dem ganzen ABC ähnlich §. 100. Denn die Durchmesser bc, BC der Grundflächen

chen beyder Kegel verhalten sich eben so wie ihre Axen Ad, AD.

§. 333.

Regel von gleichen Höhen und gleichen Grundflächen sind, sowohl unter sich, als an Spitzsäulen gleich, deren Grundflächen und Höhen, den Grundflächen und Höhen der Kegel gleich sind. (§. 565).

Stellt man sich daher zwischen zwoen gleichlaufenden Ebenen KL, MN fig. 178 auf den gleichen Grundflächen BC, bc, IG zwey Kegel ABC, abc und eine Spitzsäule EFGHI vor, so haben diese drey Körper gleiche Höhen und gleiche Grundflächen, und die beyden Kegel sind, sowohl unter sich, als der Spitzsäule gleich. Tab. VI.

§. 334.

Eine runde oder eckigte Säule ist dreymal so groß als ein Kegel der mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat. (§. 567) (XII Prop. 10).

Wenn die Grundfläche BC des Kegels ABC der Grundfläche AB der runden Säule ABDC fig. 179 gleich ist, und die Höhe AD des Kegels ist auch der Höhe DE der runden Säule gleich: so ist die runde Säule ABDC genau dreymal größer als der Kegel ABC. Eben so ist dieses zu verstehen, wenn statt der Tab. VI.

runden Säule eine eckigte von gleicher Grundfläche und Höhe genommen wird.

§. 335.

Kegel von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen. Und eben dies Verhältniß haben auch Kegel und Spitzsäulen von gleichen Grundflächen gegeneinander. (§. 569) (XII Prop. 14).

Tab. VI. Wenn die Grundfläche BC des Kegels ABC fig. 179 der Grundfläche bc des Kegels abc fig. 180 gleich ist: so verhält sich der Kegel ABC zum Kegel abc wie die Höhe AD des ersten zur Höhe ad des andern. Eben so ist dieses zu verstehen, wenn einer der beyden Körper ein Kegel und der andere eine Spitzsäule wäre.

§. 336.

Kegel von gleicher Höhe stehen gegeneinander in einem zweymal so hohen Verhältniß als die Durchmesser der Grundflächen. Ein Kegel aber verhält sich zu einer Spitzsäule von gleicher Höhe, wie die Grundfläche des Kegels zur Grundfläche der Spitzsäule. (§. 569) (XII Prop. 11).

Tab. VI. So ist, wenn der körperliche Raum des Kegels ABC fig. 181 = P, des Kegels abc

aber

aber = p gesetzt wird, und AD = ad ist

$$P : p = \begin{pmatrix} BC : bc \\ BC : bc \end{pmatrix} = BC^2 : bc^2.$$

Ist aber die Höhe ad des Kegels abc fig. 181 Tab.VI. gleich der Höhe AF einer Spitzsäule ABCDE fig. 171, so verhält sich der Kegel abc zur Spitzsäule ABCDE, wie die Grundfläche bc des Kegels zur Grundfläche BCDE der Spitzsäule.

§. 337.

Das Verhältniß der Kegeln, ist überhaupt aus einem zweymal so hohen Verhältniß der Durchmesser ihrer Grundflächen, und aus dem Verhältniß ihrer Höhen zusammengesetzt. Das Verhältniß eines Kegels zu einer Spitzsäule hingegen, ist aus den Verhältnissen der Grundflächen, und der Höhen dieser Körper zusammengesetzt. (§. 569).

Setzt man daher den körperlichen Raum Tab.VI. des Kegels ABC fig. 179 gleich Q, den körperlichen Raum des Kegels abc fig. 181 gleich p, so ist $Q : p = \begin{pmatrix} BC^2 : bc^2 \\ AD : ad \end{pmatrix} = BC^2 . AD : bc^2 . ad.$

§. 338.

Wenn bey zweyen Kegeln das zweymal höhere Verhältniß der Durchmesser ihrer Grundflächen, dem Verhältniß ihrer

rer Höhen, umgekehrt genommen, gleich ist, so sind die Körper einander gleich; und wenn zwey Kegel gleichen körperlichen Raum haben, so muß das zweymal höhere Verhältniß der Durchmesser ihrer Grundflächen, dem Verhältniß ihrer Höhen, umgekehrt genommen, gleich seyn.

Tab. VI. Ist daher bey den Kegeln ABC, abc fig. 179. 181 $BC^2 : bc^2 = ad : AD$, so ist auch $Q = p$. Wenn hingegen $Q = p$ ist, so muß umgekehrt $BC^2 : bc^2 = ad : AD$ seyn.

§. 339.

Wenn die Grundflächen einer Spitzsäule und eines Kegels, sich gegeneinander verhalten, wie die Höhen dieser Körper, umgekehrt genommen, so ist die Spitzsäule dem Kegel gleich; und wenn hingegen eine Spitzsäule einem Kegel gleich ist, so verhalten sich die Grundflächen dieser Körper, umgekehrt wie ihre Höhen.

Tab. VI. Ist daher die Grundfläche BCDE der Spitzsäule ABCDE fig. 171 = b, ihre Höhe, AF = a und ihr körperlicher Raum = q; des Kegels ABC fig. 179 Grundfläche BC hingegen = B, seine Höhe AD = A, und sein körperlicher Raum = Q, und man setzt b : B = A : a, so folgt q müsse gleich Q seyn. Ist hingegen q = Q, so folgt umgekehrt b : B = A : a.

§. 340.

§. 340.

Aehnliche Kegel stehen gegeneinander in einem dreymal höheren Verhältniß der Durchmesser ihrer Grundflächen, oder in dem Verhältniß der Würfel dieser Durchmesser. (XII Prop. 12).

Wenn der Kegel ABC fig. 177 durch eine Tab. VI. Ebene mit der Grundfläche BC gleichlaufend geschnitten wird, so fällt dadurch ein kleiner Kegel Abc = p weg, welchen man den abgeschnittenen Kegel nennen kann, und es bleibt ein Körper Q übrig, welcher der abgekürzte Kegel genannt zu werden pfleget. Da nun der abgeschnittene Kegel p dem ganzen Kegel, dessen körperlichen Raum wir durch P bezeichnen, ähnlich ist: so ist $P : p = BC^3 : bc^3$. Hierdurch läßt sich nun der abgekürzte Kegel Q unmittelbar mit dem ganzen Kegel P, sowohl als mit dem abgeschnittenen p vergleichen; denn aus der Verhältnißgleichung $P : p = BC^3 : bc^3$ lassen sich nach §. 215 folgende herleiten.

$$P - p : P = BC^3 - bc^3 : BC^3$$
$$P - p : P = BC^3 - bc^3 : bc^3.$$

Da nun $P - p = Q$ ist, so folgt es müsse

$$Q : P = BC^3 - bc^3 : BC^3 \text{ und}$$
$$Q : p = BC^3 - bc^3 : bc^3 \text{ seyn.}$$

Anmerkung. Da bey ähnlichen Kegeln die Axen oder die Höhen sich eben so wie die

Durchmesser der Grundflächen verhalten, so stehen ähnliche Kegel auch in dem Verhältniß der Würfel ihrer Axen oder ihrer Höhen. Demnach ist $P : p = AD^3 : ad^3$ und hieraus folgt wie oben

$$Q : P = AD^3 - ad^3 : AD^3$$
$$Q : p = AD^3 - ad^3 : ad^3.$$

§. 341.

Alle Punkte in der Oberfläche einer Kugel §. 96 sind von dem Mittelpunkt derselben gleich weit entfernt. (§. 573).

Tab. VI. So stehen alle Punkte B, I, A, H, E, D, in der Oberfläche der Kugel fig. 182, vom Mittelpunkt C derselben gleich ab.

§. 342.

Wenn eine Kugel mit Ebenen geschnitten wird, auf welche die Axe §. 97 senkrecht stehet, so sind die Durchschnitte der Kugel Kreisflächen, deren Mittelpunkte sämmtlich in diese Axe fallen; diese Kreisflächen sind um desto größer je näher sie dem Mittelpunkt der Kugel §. 98 liegen, dergestalt, daß die größte dieser Kreisflächen diejenige ist, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfällt. (§. 575).

Wenn

Wenn daher die Kugel fig. 182 mit Ebe- Tab. VI.
nen FaGb, DdEe, HhIi so geschnitten wird, daß die Axe der Kugel AB auf allen diesen Ebenen senkrecht stehet, so sind die Durchschnitte welche in der Kugel hierdurch entstehen Kreisflächen, deren Mittelpunkte c, C, k sämmtlich in der Axe AB liegen; der Kreis FaGb, dessen Entfernung Cc vom Mittelpunkte der Kugel kleiner ist, als die Entfernung Ck eines andern Kreises Hhli, ist größer als dieser andere Kreis, und unter allen ist der Kreis DdEe welcher durch den Mittelpunkt C der Kugel gehet, der allergrößte.

§. 343.

Eine jede grade Linie, welche in einer Kugel durch den Mittelpunkt gehet, und verlängert die Oberfläche trift, ist eine Axe der Kugel, und alle Schnitte durch den Mittelpunkt der Kugel, in jeder beliebigen Lage, sind Kreise die nicht nur unter einander gleich, sondern auch die möglich größten sind, so in der Kugel geschnitten werden können. (§. 578).

Alle grade linien AB, ab, αβ welche durch Tab. VI.
den Mittelpunkt C der Kugel fig. 183 gehen, sind Axen der Kugel und alle Schnitte, P, p, q, welche durch den Mittelpunkt C der Kugel gehen, **sind größte Kreise der Kugel, und von gleicher Größe.**

§. 344.

Ein jeder Punkt in dem Umkreise einer Kreisfläche, welche durch einen beliebigen Schnitt in der Kugel entsteht, ist von den Punkten gleich weit entfernt, wo die zu diesem Kreise gehörige Axe der Kugel, die Oberfläche derselben trift; und alle Kreisflächen der Kugel die eine gemeinschaftliche Axe haben, liegen in gleichlaufenden Ebenen. (§. 580)

Tab. VI. So stehen die Punkte F, b, G, a fig. 182 des Umkreises der Kreisfläche, deren Mittelpunkt c ist, von den Punkten A, B, wo die zu diesem Kreise gehörige Axe AB die Oberfläche der Kugel trift, gleich weit entfernt; die Kreise FaGb, DdEe, Hhli aber, welche zur gemeinschaftlichen Axe den Durchmesser AB haben, liegen in gleichlaufenden Ebenen.

§. 345.

Ein jeder Schnitt durch den Mittelpunkt der Kugel, oder ein jeder größter Kreis derselben, theilet die Kugel in zwo gleiche Halbkugeln, deren Grundflächen größte Kreise der Kugel, und deren Höhen gleich dem Halbmesser der Kugel sind.

Tab. VI. Wenn die Kugel fig. 182 in der Ebene des größten Kreises DeEd, oder welches einer-

ley

ley ist, durch den Mittelpunet C derselben geschnitten wird, so entstehen die Halbkugeln, ADeEd, BDdEe, welche den grössten Kreis DdEe der Kugel zu Grundflächen, und die Durchmesser AC, BC der Kugel zu Höhen haben.

§. 346.

Wenn eine grade runde Säule mit einer Halbkugel, und mit einem graden Kegel gleiche Grundfläche und Höhe hat, und man stellet die runde Säule und die Halbkugel mit ihren Grundflächen, den graden Kegel aber mit seiner Spitze dergestalt auf eine Ebene, daß die Axe des Kegels senkrecht auf diese Ebene fället, so sind die Durchschnitte des Kegels und der Halbkugel, welche entstehen, indem man diese Körper mit einer Ebene schnitt, welche derjenigen gleichläuft, worinnen die Grundfläche der Halbkugel lieget, zusammengenommen, eben so groß als der Durchschnitt der runden Säule, welcher durch eben dieser schneidenden Ebene hervorgebracht wird.

Wenn die grade runde Säule ABFE fig. 184 gleiche Grundfläche AB mit der Halbkugel abg und den graden Kegel α β ι hat, dergestalt daß AB = ab = αβ ist, und überdehm die Höhen GH, gh, ιθ dieser Körper gleich sind, Tab. VII.

alle drey aber auf der Ebene KL so stehen, daß die Grundflächen AB, ab der runden Säule und der Halbkugel in die Ebene KL fallen, der Kegel αβ· hingegen mit seiner Axe ·θ senkrecht auf dieser Ebene steht, und mit seiner Spitze · dieselbe berührt: so sind die Durchschnitte cd und γδ, welche eine mit KL gleichlaufende Ebene MN in der Halbkugel und den Kegel hervorbringt, zusammengenommen, eben so groß als der Durchschnitt CD, welcher durch eben dieselbe Ebene MN in der runden Säule hervorgebracht wird.

§. 347.

Wenn eine Halbkugel mit einer runden Säule gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat; so verhält sich die Halbkugel zur runden Säule wie zwey zu drey; oder die Halbkugel ist zwey Drittheile der runden Säule. (§. 582).

Tab. VII.

So ist das Verhältniß der Halbkugel abg zur runden Säule ABFE, fig. 184, weil die Grundflächen, AB, ab, sowohl als die Höhen GH, gh beyder Körper gleich sind, wie zwey zu drey, oder die Halbkugel abg ist zwey Drittheile der runden Säule ABFE.

§. 348.

Eine Kugel verhält sich zu einer runden Säule, deren Grundfläche dem größ-

sten

sten Kreise der Kugel, und dessen Höhe dem Durchmesser derselben gleich ist, wie zwey zu drey; oder die Kugel ist zwey Drittheile der runden Säule.

Wenn die Grundfläche AB der runden Säule ABCD dem größten Kreise adbe der Kugel afbg fig. 185 gleich ist, die Höhe DA der runden Säule aber dem Durchmesser ab der Kugel: so verhält sich die Kugel afbg zur runden Säule ABCD wie zwey zu drey, oder die Kugel afbg ist zwey Drittheile der runden Säule ABCD. Tab. VII.

§. 349.

Das Verhältniß der Kugeln oder Halbkugeln ist dreymal höher als das Verhältniß ihrer Durchmesser, oder ihrer Halbmesser. (§. 583) (XII Prop. 18).

So ist das Verhältniß der Kugeln afbg, AFBG oder das Verhältniß der Halbkugeln gadbe, GADBE fig. 185. 186 dreymal höher als das Verhältniß der Durchmesser ab, AB oder der Halbmesser ac, AC dieser Kugeln. Nennt man daher die Kugel afbg, fig. 185, k, die Kugel AFBG, fig. 186, hingegen K so ist Tab. VII.

$$k : K = \begin{pmatrix} ab : AB \\ ab : AB \\ ab : AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac : AC \\ ac : AC \\ ac : AC \end{pmatrix} =$$

$$ab^3 : AB^3 = ac^3 : AC^3$$

und eben so

$$\tfrac{1}{2}k : \tfrac{1}{2}K = \begin{pmatrix} ab : AB \\ ab : AB \\ ab : AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac : AC \\ ac : AC \\ ac : AC \end{pmatrix}$$

$$= ab^3 : AB^3 = ac^3 : AC^3.$$

§. 350.

Die krumme Oberfläche einer graden runden Säule, ist so groß als ein Rechteck, dessen Grundlinie dem Umkreise der Grundfläche, und dessen Höhe der Höhe der graden runden Säule gleich ist. (§. 535).

Tab. VII. So ist die krumme Oberfläche einer graden runden Säule abfg, fig. 187, einem Rechtecke bikf gleich, dessen Grundlinie bi dem Umkreise der Grundfläche adbe, und dessen Höhe fb der Höhe hc der runden Säule gleich ist.

§. 351.

Die krumme Oberfläche eines graden Kegels, ist einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinie dem Umkreise der Grundfläche des Kegels, und dessen Höhe der Seite des Kegels gleich ist. (§. 587).

Tab. VII. Wenn daher auf einer Seite AC eines graden Kegels ABC fig. 188 eine senkrechte Linie CE errichtet, und dem Umkreise der Grundfläche BC des Kegels gleich gemacht wird, und man ziehet von der Spitze A des Kegels

gels nach E die grade Linie AE, so ist das Dreyeck ACE, welches hierdurch entstehet, der krummen Oberfläche des graden Kegels ABC völlig gleich.

Anmerkung. Es ist auch leicht die krummen Oberflächen solcher Körper welche entstehen, wenn eine grade runde Säule oder ein grader Kegel mit Ebenen, so durch die Axen der runden Säule oder des Kegels gehen, geschnitten werden, mit Rechtecken oder Dreyecken zu vergleichen.

§. 352.

Die krumme Oberfläche eines graden abgekürzten Kegels, ist einem Rechtecke gleich, welches zur Grundlinie den Umkreis einer Kreisfläche hat, so durch einen Durchschnitt in den abgekürzten Kegel entsteht, wenn man denselben in der Helfte seiner Seite mit den Grundflächen gleichlaufend schnitt, und dessen Höhe der Seite des abgekürzten Kegels gleich ist. (§. 589).

Wird daher die Grundlinie BF eines Rechteckes bBFf fig. 189 dem Umkreise einer Kreisfläche DE gleich gemacht, welche entsteht, indem der abgekürzte grade Kegel bBCc in der Helfte D seiner Seite bB oder cC mit den Grundflächen bc, BC desselben, gleichlaufend Tab. VII.

schnitten wird, und die Höhe Bb des Rechteckes der Seite bB des abgekürzten Kegels gleich genommen: so ist das Rechteck bBFf der krummen Oberfläche des abgekürzten Kegels bBCc völlig gleich.

§. 353.

Die krummen Oberflächen grader runder Säulen von gleichen Grundflächen und ungleichen Höhen, verhalten sich wie die Höhen der runden Säulen.

Tab. VI. So verhalten sich die krummen Oberflächen der graden runden Säulen ABDE, each, fig. 173. 174, deren Grundflächen BGDH, abcd gleich sind, wie die Höhen FC, gk dieser Körper.

§. 354.

Die krummen Oberflächen grader runder Säulen von gleicher Höhe, verhalten sich wie die Umkreise, Durchmesser oder Halbmesser ihrer Grundflächen.

Tab. VI. et VII. So verhalten sich die krummen Oberflächen der graden runden Säulen ABDE fig. 173, und ABCD fig. 185 deren Höhen AB, DA gleich sind, wie die Umkreise ihrer Grundflächen BGDH, AEBF oder wie die Durchmesser BD, AB dieser Grundflächen, oder auch wie die Halbmesser BC, AG ihrer Grundflächen.

§. 355.

§. 355.

Das Verhältniß der krummen Oberflächen grader runder Säulen, ist überhaupt aus den Verhältnissen der Höhen, und der Durchmesser der Grundflächen dieser Körper zusammengesetzt.

Demnach verhalten sich die krummen Oberflächen der graden runden Säulen each fig. 174, DABC fig. 185 eben so wie $\binom{gk : HG}{ac : AB}$ Tab. VI. et VII.

$= gk \,.\, ac : HG \,.\, AB.$

§. 356.

Die krummen Oberflächen ungleicher grader runder Säulen verhalten sich eben so, wie die Rechtecke, welche entstehen, wenn man diese Körper mit Ebenen durch ihre Axen schnitt.

So verhalten sich die krummen Oberflächen der graden runden Säulen each fig. 174, DABC fig. 185 wie die Rechtecke eakchge, DAGBCHD, welche entstehen, indem beyde Körper mit Ebenen durch ihre Axen gk, HG geschnitten werden. Tab. VI. et VII.

§. 357.

Die krumme Oberfläche einer graden runden Säule, ist einem Kreise gleich, dessen Halbmesser das mittlere

Glied

Glied einer Verhältnißgleichung von dreyen Gliedern ist, welche zu äussern Gliedern die Höhe, und den Durchmesser der Grundfläche der graden runden Säule hat.

Tab. VII. Wird daher eine grade linie $\alpha\gamma$ gesucht, welche das mittlere Glied zwischen der Höhe ch und dem Durchmesser ab der Grundfläche adbea der runden Säule abfg fig. 187 ist, dergestalt daß $ch : \alpha\gamma = \alpha\gamma : ab$ oder $\alpha\gamma = \sqrt{ch . ab}$ ist, und man beschreibt mit der gefundenen graden linie $\alpha\gamma$ einen Kreis $\alpha\delta\beta$: fig. 190, so ist dieser Kreis der krummen Oberfläche der graden runden Säule abfg völlig gleich.

§. 358.

Die krumme Oberfläche eines graden Kegels verhält sich zur Grundfläche desselben, wie die Seite des Kegels zum Halbmesser der Grundfläche.

Tab. VII. So verhält sich die krumme Oberfläche des graden Kegels ABC fig. 188, oder das ihr gleiche Dreyeck ACE zur Grundfläche BC dieses Kegels $= AC : BD$.

§. 359.

Die krumme Oberfläche eines graden Kegels, ist einem Kreise gleich, dessen

sen Halbmesser das mittlere Glied einer Verhältnißgleichung von dreyen Gliedern ist, deren äussere Glieder die Seite und der Halbmesser der Grundfläche des Regels sind.

Wird demnach eine grade Linie r gesucht, welche das mittlere Glied zur Seite AB, und zum Halbmesser BD der Grundfläche BC des graden Kegels ABC fig. 188 ist, dergestalt daß AB : r = r : BD oder r = √AB . BD, und man beschreibt mit dem Halbmesser r einen Kreis C fig. 191, so ist dieser Kreis der krummen Oberfläche des graden Kegels völlig gleich. Tab. VII.

§. 360.

Die krummen Oberflächen zweyer graden Kegel, verhalten sich wie zwey Rechtecke, deren Grundlinien den Halbmessern oder Durchmessern der Grundflächen, und deren Höhen den Seiten der Regeln gleich sind.

Wird mit dem Halbmesser BD der Grundfläche, und mit der Seite AB eines graden Kegels ABC fig. 181 ein Rechteck abcd fig. 192 verzeichnet; mit dem Halbmesser BD der Grundfläche, und mit der Seite AB eines andern graden Kegels fig. 188 aber, ein anderes Rechteck efgh fig. 193 gebildet, so verhalten sich die krummen Oberflächen der Kegel, wie die Rechtecke abcd, efgh fig. 192. 193. Tab. VI. et VII.

§. 361.

§. 361.

Die krumme Oberfläche einer graden runden Säule, verhält sich zur krummen Oberfläche eines graden Kegels, wie ein Rechteck, welches in der runden entsteht, wenn dieselbe durch die Axe geschnitten wird, zu einem Rechteck, dessen Grundlinie dem Halbmesser der Grundfläche, und dessen Höhe der Seite des Kegels gleich ist.

Tab. VII. So verhält sich die krumme Oberfläche der graden runden Säule ABCD, fig. 185, zur krummen ABC Oberfläche des geraden Kegels fig. 188, wie das durch die Axe GH in der runden Säule geschnittene Rechteck AGBCHD fig. 185 zum Rechtecke efgh fig. 193, dessen Grundlinie ef gleich ist, dem Halbmesser BD der Grundfläche des Kegels ABC fig. 188, und dessen Höhe eh einerley ist, mit der Seite AB eben dieses Kegels.

§. 362.

Die krumme Oberfläche eines abgekürzten graden Kegels, verhält sich zur krummen Oberfläche eines jeden ganzen graden Kegels, wie ein Rechteck mit der Summe der Halbmesser der Grundflächen, und der Seite des abgekürzten Kegels beschrieben, zu einem Rechteck, dessen Grundlinie dem Halbmesser der Grundfläche,

fläche, und dessen Höhe der Seite des ganzen Kegels gleich ist.

Wird daher mit der Summe bg + BF der Halbmesser des graden abgekürzten Kegels bBCc fig. 189, und mit der Seite bB desselben, das Rechteck ABCD fig. 194 beschrieben, und man setzt: das Rechteck efgh fig. 193 sey mit dem Halbmesser BD der Grundfläche, und der Seite AB des ganzen graden Kegels ABC fig. 188 gebildet, so verhält sich die krumme Oberfläche des abgekürzten graden Kegels bBCc, fig. 189, zur krummen Oberfläche des ganzen graden Kegels ABC fig. 188, wie das Rechteck ABCD fig. 194 zum Rechteck efgh fig. 193. Tab. VII.

§. 363.

Die krumme Oberfläche eines abgekürzten graden Kegels, ist einer Kreisfläche gleich, dessen Halbmesser das mittlere Glied einer Verhältnißgleichung von dreyen Gliedern ist, davon die äussern Glieder die Seite des abgekürzten graden Kegels, und die Summe der Halbmesser seiner Grundflächen sind.

Sucht man demnach zwischen der Summe bg + BF der Halbmesser bg, BF der Grundflächen des abgekürzten graden Kegels bBCc fig. 189, und der Seite bB desselben, das mittlere Glied AC einer Verhältniß- Tab. VII.

gleichung von dreyen Gliedern, dergestalt daß

$$bg + BF : AC = AC : bB \text{ oder}$$

$$AC = \sqrt{bB\,(bg + BF)} \text{ sey}$$

und beschreibet mit dem Halbmesser AC einen Kreis K fig 195, so ist die Kreisfläche K der krummen Oberfläche des abgekürzten graden Kegels bBCc fig. 189, völlig gleich.

§. 364.

Die krummen Oberflächen abgekürzter grader Kegel, verhalten sich wie die Rechtecke, welche mit der Summe der Halbmesser ihrer Grundflächen, und ihren Seiten, beschrieben werden können.

Tab. VII. Wird demnach bey dem Rechteck ABCD fig. 194 $AB = bg + BF$ und $EC = Bb$ des abgekürzten graden Kegels bBCc fig. 189 genommen, und ein anderes Rechteck $\alpha\beta\gamma\delta$ fig. 197 dergestalt verzeichnet, daß $\alpha\beta = eg + bd$, $\beta\gamma$ aber $= eb$ des abgekürzten graden Kegels ebcf fig. 196 ist, so verhält sich die krumme Oberfläche des abgekürzten graden Kegels bBCc fig 189 zur krummen Oberfläche des abgekürzten graden Kegels ebcf fig. 196, wie das Rechteck ABCD fig. 194 zum Rechteck $\alpha\beta\gamma\delta$ fig. 197.

§. 365.

Die krumme Oberfläche eines abgekürzten graden Kegels, verhält sich zur krum-

krummen Oberfläche einer graden runden Säule, wie ein Rechteck, mit der Summe der Halbmesser der Grundflächen und der Seite des abgekürzten Kegels beschrieben, zu jedem Rechtecke, welches durch die Axe der runden Säule, aus derselben geschnitten werden kann.

So verhält sich die krumme Oberfläche des graden abgekürzten Kegels ebcf fig. 196 zur krummen Oberfläche der graden runden Säule ABCD fig. 185 wie das Rechteck αβγδ fig. 197, dessen Grundlinie βα der Summe eg + bd der Halbmesser eg, bd der Grundflächen des abgekürzten Kegels ebcf, fig. 196, und dessen Höhe αδ der Seite eb eben dieses abgekürzten Kegels gleich ist, zum Rechteck AGBCHD fig. 185, welches entsteht, wenn die grade runde Säule ABCD mit einer Ebene durch die Axe HG geschnitten wird. Tab. VII.

§. 366.

Wenn eine Kugel die krumme Oberfläche eines graden Kegels von innen berührt, so geschiehet dieses allemahl in einem Kreise, der in eine Ebene liegt, welche die gemeinschaftliche Axe des Kegels und der Kugel senkrecht schnitt; halbiret nun überdem die Ebene des Berührungskreises die Axe des Kegels, so ist die krumme Oberfläche des graden Kegels, der krum-

men Oberfläche einer graden runden Säule gleich, welche den grössten Kreis der Kugel zur Grundfläche, mit dem Kegel aber gleiche Höhe hat.

Tab. VII. Wenn eine Kugel bdecb die krumme Oberfläche eines graden Kegels ABC fig. 198 in einem Kreise bc berührt, dessen Ebene die Axe AD des graden Kegels ABC in G senkrecht halbirt, so ist die krumme Oberfläche des graden Kegels ABC der krummen Oberfläche einer graden runden Säule FGHI fig. 199 gleich, dessen Grundfläche FG dem grössten Kreise de der Kugel bdecb, und dessen Höhe FI der Höhe AD des graden Kegels gleich ist.

§. 367.

Wenn eine Kugel die krumme Oberfläche eines graden abgekürzten Kegels von innen berührt, so geschiehet die Berührung in einem Kreise, auf welchen die Axe des abgekürzten Kegels senkrecht stehet; wird nun die Axe oder Höhe dieses abgekürzten graden Kegels durch die Ebene des Berührungskreises auch halbirt, so ist die krumme Oberfläche des graden abgekürzten Kegels eben so groß als die krumme Oberfläche einer graden runden Säule, welche den grössten Kreis der Kugel zur Grundfläche, und die Axe des abgekürzten Kegels zur Höhe hat.

Wenn

Wenn eine Kugel e b c f die krumme Ober- Tab. VII.
fläche eines graden abgekürzten Kegels ABCD fig. 200 in den Kreis e f dergestalt berührt, daß die Ebene dieses Kreises die Axe F E des abgekürzten Kegels in G senkrecht schnitt, so ist die krumme Oberfläche des abgekürzten graden Kegels ABCD eben so groß als die krumme Oberfläche einer graden runden Säule LHIK fig. 201, dessen Grundfläche HI dem größten Kreise der Kugel, und dessen Höhe LH der Axe F E des abgekürzten graden Kegels A B C D gleich ist.

§. 368.

Wenn eine Kugel durch irgend eine Ebene geschnitten wird, so wird dieselbe dadurch in zwey Kugel Abschnitte zerfällt, darunter derjenige der größere ist, in welchem der Mittelpunkt der Kugel lieget; und die krumme Oberfläche eines jeden dieser Kugel-Abschnitte, ist eben so groß als die krumme Oberfläche einer graden runden Säule, welche den größten Kreis der Kugel zur Grundflache, und die Höhe des Kugel-Abschnittes zur Höhe hat.

Wenn die Kugel E C A F B D E fig 202 Tab. VII.
mit irgend einer Ebene in C D geschnitten wird, so theilet diese Ebene die Kugel in zwey Kugel-Abschnitte C E D G C; C A F B D G C, davon der letzte der größere ist, weil der Mittelpunkt

H der Kugel in demselban lieget; und die krumme Oberfläche des Kugel-Abschnittes CEDGC, ist der krummen Oberfläche einer graden runden Säule abcd fig. 203 gleich, deren Grundfläche bc dem größten Kreise AB der Kugel, und deren Höhe ab der Höhe EG des Kugel-Abschnittes CEDGC gleich ist. Eben so ist die krumme Oberfläche des größeren Kugel-Abschnittes CAFBDGC der krummen Oberfläche einer graden runden Säule efgh fig. 204 gleich, wenn die Grundfläche fg der runden Säule, dem größten Kreise AB der Kugel, ihre Höhe ef aber, der Höhe GF des Kugel-Abschnittes CAFBDGC gleich ist.

§. 369.

Die krumme Oberfläche eines Kugel-Abschnittes ist so groß, als ein Kreis, welcher mit dem Abstande des Punktes, wo die Axe des Kugel-Abschnittes die krumme Oberfläche trift, von dem Umkreise der Grundfläche des Kugel-Abschnittes, beschrieben worden.

Tab. VII. Beschreibet man daher mit dem Abstande ED des Punktes E, wo die Axe EG des Kugel-Abschnittes CGDEC fig. 202 die krumme Oberfläche trift, von dem Umkreise der Grundfläche CD dieses Abschnittes, einen Kreis c fig. 205 indem man r = ED nimmt, so ist dieser Kreis der krummen Oberfläche des Kugel-Abschnit-

schnittes CGDEC völlig gleich. Eben so ist der Kreis C fig. 206, welcher mit R = FD fig. 202 beschrieben worden, der krummen Oberfläche des Kugel-Abschnittes CAFBDGC gleich.

§. 370.

Die krumme Oberfläche einer halben Kugel, ist der krummen Oberfläche einer graden runden Säule gleich, welche mit ihr gleiche Höhe und gleiche Grundfläche hat. (§. 594).

So ist die krumme Oberfläche der halben Kugel abdgca, der krummen Oberfläche der graden runden Säule EABF fig. 184 gleich, da die Grundflächen und Höhen beyder Körper gleich sind. Tab. VII.

§. 371.

Die ganze Oberfläche einer Kugel, ist so groß, als die krumme Oberfläche einer graden runden Säule, welche den grösten Kreis der Kugel zur Grundfläche, und den Durchmesser derselben zur Höhe hat. (§. 594).

So ist die ganze Oberfläche der Kugel afbga eben so groß als die krumme Oberfläche der graden runden Säule ABCD fig 185, wenn die Grundfläche AB der graden runden Tab. VII,

Säule, dem grösten Kreise a d b e der Kugel, und die Höhe A D, der graden runden Säule dem Durchmesser a b der Kugel gleich ist.

§. 372.

Die krumme Oberfläche einer halben Kugel ist zwevmal so groß, als ihre Grundfläche; die ganze Kugelfläche aber ist viermal größer, als die Fläche ihres größten Kreises. (§. 595).

Tab. VII. So ist die krumme Oberfläche der Halbkugel a b d g c a fig. 184 doppelt größer als ihre Grundfläche a b. Hingegen ist die ganze Oberfläche der Kugel A F B G fig. 186 viermal größer als die Fläche ihres grösten Kreises A D B E.

§. 373.

Die Kugelfläche ist einem Kreise gleich, dessen Halbmesser dem Durchmesser des größten Kreises der Kugel gleich ist.

Tab. VII. Stellet man sich daher mit dem Durchmesser a b des grösten Kreises a d b e a einer Kugel a f b g a fig. 185 einen Kreis dergestalt beschrieben vor, daß der Halbmesser desselben dem Durchmesser a b des grösten Kreises der Kugel gleich sey, so ist dieser Kreis der Kugelfläche gleich.

§. 374.

§. 374.

Die krumme Oberfläche, welche durch zwey gleichlaufende Kreisflächen einer Kugel, von der Kugelfläche abgeschnitten, und ein Gürtel der Kugelfläche genannt wird, ist so groß, als die krumme Oberfläche einer graden runden Säule, deren Grundfläche dem größten Kreise der Kugel, und deren Höhe der Höhe des Gürtels gleich ist.

So ist der Gürtel CIKD, fig. 202, eben so groß, als die krumme Oberfläche der graden runden Säule abcd fig. 207, deren Grundfläche ab dem grösten Kreise AB der Kugel gleich ist, und deren Höhe ad einerley ist, mit der Höhe GL des Gürtels CIKD fig. 202. Tab. VII.

§. 375.

Die krummen Oberflächen ähnlicher grader runder Säulen, stehen gegeneinander in einem zweymal höheren Verhältniß, als die Durchmesser ihrer Grundflächen, oder als die Axen oder Höhen dieser Körper.

Wenn die grade runde Säule efgh fig. 204 der graden runden Säule abcd fig. 208 ähnlich ist, so verhält sich die krumme Oberfläche der runden Säule efgh, fig. 204, zur krummen Oberfläche der runden Säule abcd, Tab. VII.

fig. 208, wie $fk^2 : bm^2 = ik^2 : em^2 = ef^2 : ah^2$.

Anmerkung. Da das Verhältniß der Grundflächen ähnlicher grader runder Säulen, auch zweymal höher, als das Verhältniß der Durchmesser ihrer Grundflächen, oder als das Verhältniß der Axen oder Höhen solcher Körper ist, so kann man auch sagen: **das Verhältniß der krummen Oberflächen ähnlicher grader runder Säulen, ist einerley mit dem Verhältniß ihrer Grundflächen.**

§. 376.

Die krummen Oberflächen ähnlicher grader Kegel, stehen in einem zweymal höheren Verhältniß der Durchmesser ihrer Grundflächen, oder der Axen dieser Körper.

Tab. VII. So verhält sich die krumme Oberfläche des graden Kegels A b c zur krummen Oberfläche des graden Kegels A B C fig. 189 wie $bc^2 : BC^2 = Ag^2 : AF^2$.

Anmerkung. Eben das was bey dem vorigen §. ist angemerket worden, findet auch hier statt, und man kann sagen: **das Verhältniß der krummen Oberflächen ähnlicher grader Kegel, ist einerley mit dem Verhältniß ihrer Grundflächen.**

§. 377.

§. 377.

Das Verhältniß der Kugelflächen, ist zweymal höher, als das Verhältniß ihrer Durchmesser oder Halbmesser. (§. 596).

So verhalten sich die Oberflächen der Kugeln afbga fig. 185 und AFBGA fig. 186, wie ab^2 zu AB^2 oder ac^2 zu AC^2. Tab. VII.

Zeichnungen der Meßkunst.

§. 378.

Auf eine begrenzte grade Linie, ein gleichseitiges Dreyeck zu setzen. (I Prop. 1) (§. 326).

Es sey AB fig. 209 die grade Linie auf welche ein gleichseitiges Dreyeck gesetzt werden soll. Tab. VIII.

1°. Man öfne einen Zirkul, so weit, daß AB zwischen seinen Schenkeln gefaßet werden kann.

2°. Beschreibe mit dieser Oefnung aus A und B zwey Kreise, oder nur die nöthigen Bögen DE, FG, derselben.

3°. Bemerke den Punkt C wo sie sich schneiden.

4°. Von dem Punkte C ziehe man die graden Linien CA, CB, so ist CAB das verlangte gleichseitige Dreyeck.

Der Grund dieses Verfahrens beruhet auf den 34 §.

§. 379.

Die Summe und den Unterschied zwoer gegebenen graden Linien zu finden. (§. 292) (I Prop. 3).

Tab. VIII. Es seyn die gegebenen graden Linien a und b fig. 210.

1°. Man ziehe eine unbegränzte grade Linie AZ.

2°. Trage auf dieselbe von A in B die größte der beyden gegebenen graden Linien b.

3°. Mit der kleinern Linie a beschreibe man aus B die Kreisbögen cd, ef und bemerke die Punkte C und D wo sie die unbegrenzte grade Linie AZ schneiden, so ist AC = b — a und AD = b + a.

Der Grund dieses Verfahrens beruhet auf den 34 §.

§. 380.

Einen gegebenen geradlinigten Winkel zu halbiren. (I Prop. 9) (§. 333).

Tab. VIII. Es sey der geradlinigte Winkel ABC fig. 211 in zween gleiche Winkel zu zerfällen, oder zu halbiren.

1°. Von der Spitze B des gegebenen Winkels ABC trage man auf beyde Schenkel BA,

BA, BC desselben, gleiche grade Linien BD, BE von willkührlicher Größe.

2°. Aus den hierdurch gefundenen Punkten D, E beschreibe man mit einer willkührlichen, aber nehmlichen Oefnung des Zirkuls Kreisbögen HI, FG bis sie sich in einem Punkte K schneiden.

3°. Von K ziehe man nach der Spitze B des Winkels ABC die grade Linie KB, so theilet dieselbe den gegebenen Winkel ABC in zween gleiche Winkel ABK, KBC.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf den 34 §. und auf das im 137 §. enthaltene dritte Kennzeichen der Gleichheit zweyer Dreyecke, und wird leicht eingesehen, wenn man sich nur von K, nach D und E, zwo grade Linien gezogen, vorstellt.

§. 381.

Eine begrenzte grade Linie zu halbiren. (I Prop. 10) (§. 337).

Es sey die grade Linie AB fig. 212 in zween gleiche Theile zu zerfällen. Tab. VII.

1°. Mit einer grössern Oefnung des Zirkuls, als die Hefte der gegebenen graden Linie AB, beschreibe man aus A und B zwey Kreise, oder bemerke bloß die Punkte D und E, wo sich die aus A und B beschriebene Kreise, DGE, DFE, schneiden würden.

2° Man

2°. Man lege ein Linial an D und E, und bemerke auf A B den Punkt C, wo eine durch D und E gezogene grade Linie, die Linie A B schneiden würde, so ist A B bey C in zween gleiche Theile zerfällt.

Dieses Verfahren gründet sich auf §. 34, auf die Zeichnung des vorigen §., und auf den im §. 145 enthaltenen Satz, und wird leicht eingesehen, wenn man sich nur von D nach A und B grade Linien gezogen vorstellt.

§. 382.

Auf eine grade Linie, von einem in derselben gegebenen Punkt, eine senkrechte Linie zu errichten. (I Prop. 11) (§. 334).

Tab. VIII.

Es sey A B fig. 213 die gegebene grade Linie, und C in derselben derjenige Punkt, von welchem auf A B eine senkrechte Linie errichtet werden soll.

1°. Von C aus, schneide man, sowohl gegen A als B, von C A und C B gleich große Stücke C D, C E ab.

2°. Aus den gefundenen Punkten D, E beschreibe man mit einer willkührlichen aber nehmlichen Oefnung des Zirkuls die Kreisbögen F G, H I bis sie sich in K schneiden.

3°. Von K ziehe man nach C die grade Linie K C so stehet dieselbe in C auf A B senkrecht.

Der Grund dieser Zeichnung liegt in §. 34 und §. 143, und wird völlig eingesehen, wenn man sich von K nach D und E, grade Linien gezogen, vorstellt.

§. 383.

Auf eine unbegrenzte grade Linie, von einem ausserhalb derselben gegebenen Punkt, eine grade Linie senkrecht zu ziehen. (I Prop. 12) (§. 339).

Es sey AB fig. 214 die gegebene grade unbegrenzte Linie, und C der Punkt, von welchem auf dieselbe eine senkrechte Linie gezogen werden soll. Tab. VIII.

1°. Mit einer willkührlichen aber doch so großen Oefnung des Zirkuls, welche über AB auf die entgegengesetzte Seite herüber reichet, beschreibe man aus C einen Kreisbogen DE, oder bemerke in der graden Linie AB bloß die Punkte D, E wo derselbe die grade Linie AB schneiden würde.

2°. Aus D und E beschreibe man mit der vorigen Oefnung des Zirkuls, oder, wenns gefällig ist, mit einer andern Oefnung des Zirkuls die Kreisbögen FG, HI, und merke den Punkt K, wo sie sich schneiden.

3°. An C und K lege man ein Linial, und ziehe von C bis an AB die grade Linie CL, so fället CL aus dem Punkte C auf AB senkrecht.

Diese Zeichnung hat ihren Grund in §. 34 und §. 145 und wird mittelst der in §. 380 beschriebene Zeichnung eingesehen, wenn man sich nur von C nach D und E fig. 214 grade linien gedenket.

§. 384.

Aus dreyen gegebenen graden Linien, davon zwo und zwo zusammengenommen, größer als die dritte sind, ein Dreyeck zu verfertigen. (1 Prop. 22) (§. 324).

Tab. VIII.

Es seyn die drey gegebenen graden linien a, b, c fig. 215.

1°. Auf eine grade unbegrenzte linie AZ trage man aus A in B eine der drey gegebenen graden linien, wie hier a.

2°. Aus dem Punkte A beschreibe man, mit einer andern der dreyen gegebenen linien, wie hier mit b, einen Kreisbögen gh, und mit der letzten der gegebenen linien, einen andern Kreisbogen ef aus dem Punkte B, und bemerke den Punkt C, wo sich die beyden Kreisbögen gh, ef schneiden.

3°. Von dem hierdurch gefundenen Punkt C, ziehe man, nach A und B, die graden linien CA, CB, so ist das Dreyeck CAB das verlangte.

Der Grund dieses Verfahrens beruhet auf §. 34, und hat keine Schwürigkeit eingesehen zu werden, wenn man nur anmerkt, daß hier AB

= a,

= a, AC = b, und BC = c ist gemacht worden.

§. 385.

An einen bestimmten Punkt einer graden Linie, einen geradlinigten Winkel zu setzen, der einem gegebenen Winkel gleich ist. (I Prop. 23) (§. 327).

Es sey AB fig. 216 die gegebene grade Linie, und D derjenige Punkt, wo an derselben ein Winkel gesetzt werden soll, der dem gegebenen Winkel C gleich ist. Tab. VIII.

1°. Aus der Spitze C des gegebenen Winkels, trage man auf die Schenkel desselben, die graden Linien CE, CF von gleicher Länge.

2°. Aus D trage man gegen B die Linie DG = CF = CE, und mit der nehmlichen Oefnung des Zirkuls beschreibe man aus D einen Kreisbogen HI.

3°. Man öfne den Zirkul so weit, daß, wenn der eine Schenkel in F gesetzt wird, der andere bis in E reiche, und mit dieser Oefnung des Zirkuls beschreibe man aus G einen Kreisbogen KL, oder bemerke bloß den Punkt M, wo dieser letzte Kreisbogen KL den aus D beschriebenen HI schnitt.

4°. Von D ziehe man durch M die grade Linie DN, so ist der Winkel NDB, welcher hier-

durch

durch beym Punkte D entsteht, dem gegebenen Winkel C gleich.

Diese Zeichnung gründet sich auf den vorigen §. und wird mit Zuziehung des §. 137 völlig eingesehen, wenn man sich nur von E nach F und von M nach G grade Linien gezogen, einbildet.

§. 386.

Durch einen gegebenen Punkt, eine grade Linie mit einer gegebenen gleichlaufend zu ziehen. (I Prop. 31) (§. 329).

Tab. VIII.

Es sey der Punkt C, fig. 217, durch welchen mit der gegebenen graden Linie AB eine gleichlaufende Linie gezogen werden soll.

1°. Von dem gegebenen Punkt C, ziehe man nach AB eine grade Linie CF, von willkührlicher Lage, so entstehen die Winkel CFA, CFB.

2°. An den Punkt C der graden Linie CF, setze man nach vorigen §. einen Winkel ECF, gleich dem Wechselwinkel CFA, oder welches gleich ist, einen Winkel DCF, eben so groß, als sein Wechselwinkel CFB.

3°. Verlängere man im ersten Fall den Schenkel CE bis in D, im andern Fall aber den Schenkel DC bis in E, so ist die grade Linie DE durch C mit AB gleichlaufend gezogen.

Der Grund dieses Verfahrens ist im §. 117 enthalten.

§. 387.

§. 387.

Mit zwoen gegebenen graden Linien, und einem Winkel ein gleichgestrecktes Viereck zu verzeichnen. (§. 330).

Es seyn die gegebenen Linien a, b der Winkel c fig. 218.

1°. Man ziehe eine grade linie BC = b, setze an dieselbe bey dem Punkte B nach §. 385 einen Winkel B = c, und mache den andern Schenkel AB dieses Winkels gleich der andern gegebenen graden linie a.

2°. Aus C beschreibe man, mit der Linie a, einen Kreisbogen GH, und aus A mit b einen andern EF, und bemerke den Punkt D, wo sich beyde Kreisbögen schneiden.

3°. Von D ziehe man nach A und C die graden linien DA, DC, so ist ABCD das verlangte gleichgestreckte Viereck.

Diese Zeichnung gründet sich auf §. 141.

Anmerkung. Wenn statt den schiefen Winkel c ein rechter Winkel genommen wird, so kann auf eben die Art mit zwoen gegebenen graden linien ein Rechteck beschrieben werden. Durch eben dieses Verfahren lässet sich auch auf jede gegebene grade linie ein ordentliches Viereck errichten. (I Prop. 46).

§. 388.

Eine gegebene grade Linie, so zu

theilen, daß das Rechteck, welches von der ganzen Linie und einem der beyden Stücke eingeschlossen wird, einem ordentlichen Vierecke gleich sey, welches auf das andere Stück errichtet werden kann. (II Prop. 11).

Tab. VIII. Es sey AB fig. 219 die zu theilende grade Linie.

1°. Auf AB errichte man, zufolge der Anmerkung des vorigen §., das ordentliche Viereck ABCD.

2°. Die Seite BC des ordentlichen Vierecks ABCD theile man bey E in zween gleiche Theile, und ziehe von E nach A die grade Linie EA.

3°. Man verlängere CB über B bis EF so groß als EA werde, und trage BF von B gegen A in G, so ist AB in G, so wie verlangt worden, getheilet.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 251. 255. 273 und wird daraus leicht eingesehen, wenn man nur durch G mit AD oder BC eine gleichlaufende Linie ziehet, auf FE ein ordentliches Viereck errichtet, und in demselben mittelst Verlängerung der graden Linie AB sowohl ordentliche Vierecke, als auch Rechtecke bildet, deren Seiten gleich an BF, BE, und endlich die hierdurch entstandene ordentliche Vierecke und Rechtecke mit denen in ABCD entstandenen, gehörig vergleicht.

Der analytische Beweis kann folgendermassen geführt werden.

Da $EF = AE$ genommen worden, so ist

$AE = BE + BF$, folglich

1°. $AE^2 = AE . BE + AE . BF$.

Ferner ist

$AB = AG + BG$, folglich

$AB^2 = AB . AG + AB . BG$, und

$AB^2 + BE^2 = AB . AG + AB . BG + BE^2$.

Da nun nach §. 273 $AB^2 + BE^2 = AE^2$, so ist

2°. $AE^2 = AB . AG + AB . BG + BE^2$.

Aus 1 und 2 folgt nun

$AE . BE + AE . BF = AB . AG + AB . BG + BE^2$.

Oder da $AE = BE + BF$, so wird

$(BE + BF) . BE + (BE + BF) BF = AB . AG + AB . BG + BE^2$.

oder wenn das was in den Parenthesen steht, gehörig mit BE und BF vervielfältiget wird.

$BE^2 + 2BE . BF = AB . AG + AB . BG + BF^2 + BE^2$

und da BE^2 auf beyden Seiten vorkömmt, so wird

$2BE . BF + BF^2 = AB . AG + AB . BG$

und da 2 BE = AB, BF aber = BG, so folgt

$$AB . BG + BG^2 = AB . AG +$$

AB . BG.

Da nun auf beyden Seiten AB . BG, ohne Nachtheil der Gleichheit, weggelassen werden kann, so folgt

$$BG^2 = AB . AG.$$

Und da BG^2 das ordentliche Viereck des Theiles BG, AB . AG aber ein Rechteck bezeichnen, welches mit dem andern Theile AG und der ganzen Linie AB beschrieben worden, so folgt, daß die grade Linie AB in G, wie verlangt worden, getheilet sey.

§. 389.

Den Mittelpunkt einer gegebenen Kreisfläche zu finden. (III Prop. 1) (§. 361).

Tab. VIII. Es sey ACBD fig. 220 die gegebene Kreisfläche, deren Mittelpunkt gefunden werden soll.

1°. Man ziehe eine beliebige Sehne AB dieser Kreisfläche, und theile dieselbe nach §. 381 in zween gleiche Theile AE, EB durch eine auf AB senkrechte Linie DC.

2°. Die grade Linie DC zerfälle man in F von neuem in zween gleiche Theile DF, FC, so ist F der gesuchte Mittelpunkt.

Der Grund dieses Verfahrens beruhet auf §. 165.

§. 390.

Einen gegebenen Kreisbogen in zween gleiche Theile zu zerfällen. (§. 360).

Es sey ADB fig. 221 der in zween gleiche Theile zu zerfällende Kreisbogen. Tab. VIII.

1°. Man ziehe die Sehnen AB des gegebenen Bogens, und theile dieselbe nach §. 381 durch die grade linie DE bey E senkrecht in zween gleiche Theile.

2°. Man verlängere die theilende linie DE bis sie bey D den gegebenen Kreisbogen schnitt, so ist AD = DB; folglich der Bogen bey D halbirt.

Diese Zeichnung hat ihren Grund in §. 165.

§. 391.

Durch drey gegebene Punkte die nicht in einer graden Linie liegen, eine Kreislinie zu beschreiben. (§. 362).

Es seyn A, B, C fig. 222 die drey gegebene Punkte, welche nicht in grader linie liegen, und durch welche eine Kreislinic beschrieben werden soll. Tab. VIII.

1°. Ziehe man zwey und zwey dieser Punkte wie hier A, B und B, C mit graden Linien AB, BC zusammen.

2°. Theile die graden Linien AB, BC nach §. 381 durch die senkrechten Linien FG, DE in zween gleiche Theile, und verlängere sie so weit bis sie sich in H schneiden.

3°. Aus dem gefundenen Punkte H beschreibe man mit der Oefnung HA oder HB, oder HC einen Kreis, so wird derselbe durch die gegebene drey Punkte A, B, und C gehen.

Diese Zeichnung gründet sich auf §. 165, und wird leicht eingesehen, wenn man nur bedenkt, daß AB, BC Sehnen des zu beschreibenden Kreises werden müssen, und daß der Punkt H sowohl in FG als DE liege.

Anmerkung. Auf eben die Art kann zu einem gegebenen Kreisbogen der Mittelpunkt gefunden werden, wenn man in diesen Kreisbogen drey Punkte bestimmt, und nach der hier erklärten Zeichnung durch dieselbe eine Kreislinie beschreibt, davon der gegebene Kreisbogen nur ein gewisser Theil ist.

§. 392.

Aus einem bestimmten Punkt einer Kreislinie einen Kreisbogen abzuschneiden, der einem andern gegebenen Kreisbogen

bogen der nehmlichen Kreislinie gleich sey. (§. 370).

Es sey AFBCED fig. 223 die Kreislinie, C der Punkt, aus welchem ein Keisbogen von der Kreislinie abgeschnitten werden soll, der einem gegebenen Kreisbogen AFB gleich sey. Tab. VIII.

Man ziehe die Sehne AB des gegebenen Bogens AFB, und trage diese Sehne mit einem Zirkul aus C in D, so ist CED der verlangte Kreisbogen.

Der Grund hiervon beruhet auf §. 181.

§. 393.

Von einem gegebenen Punkt eine grade Linie zu ziehen, welche einen gegebene Kreis, ausserhalb dessen der gegebene Punkt liegt, berühre. (III Prop. 17) (§. 382).

Erste Auflösung. Es sey DBC fig. 224 der gegebene Kreis, und A der bestimmte Punkt. Tab. VIII.

1°. Suche man den Mittelpunkt E des gegebenen Kreises nach §. 389, wenn derselbe nicht schon bekannt ist.

2°. Mit der Entfernung EA beschreibe man den Kreis AFG und merke den Punkt D wo derselbe die grade Linie EA schnitt.

3°. Errichte in D auf EA die senkrechte Linie DF bis an den durch A, F, G laufenden Kreis, und merke den Punkt F.

4°. Ziehe von F nach E die grade Linie FE, und von A durch B, wo EF den gegebenen Kreis geschnitten hat, die grade Linie AG, so ist AG die verlangte Berührungs-Linie.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf das erste Kennzeichen der Gleichheit zweyer Dreyecke §. 135, und wird mit Zuziehung des §. 184 richtig eingesehen, wenn man nur bedenkt, daß nach §. 34, AE = EF und EB = ED ist.

Tab. VIII. 225 Zwote Auflösung. Es sey DEF fig. der Kreis, und A der gegebene Punkt.

1°. Suche man, wenn der Mittelpunkt des gegebenen Kreises nicht bekannt ist, denselben nach §. 389, und verbinde ihn mit dem gegebenen Punkt A durch eine grade Linie AC.

2°. Theile AC in B nach §. 381 in zween gleiche Theile.

3°. Beschreibe aus B mit BA = BC einen Kreis ADCE, oder bemerke vielmehr bloß die Punkte D und E, wo der aus B beschriebene Kreis, ADCE, den gegebenen DFE schneiden würde.

4°. Nach den hierdurch entdeckten Punkten E, D ziehe man von A die die graden Linien AG, AH, so berühren diese den gegebenen Kreis in D und E, und eine jede derselben ist die verlangte Berührungslinie des Kreises.

Dieses Verfahren gründet sich auf §. 190, und wird mit Zuziehung des §. 184 völlig eingesehen,

gesehen, wenn man sich nur noch von C nach D und E grade Linien gezogen vorstellt.

§. 394.

Auf eine gegebene grade Linie, einen Kreis-Abschnitt zu setzen, welcher einen Winkel enthalte, der einem gegebenen gleich sey. (III Prop. 33).

Es sey A B fig. 226 die grade Linie, und C der gegebene Winkel. Tab. VIII.

1°. An A B setze man bey A nach §. 385 einen Winkel B A D dem gegebenen Winkel C gleich.

2°. An den Schenkel A D des Winkels B A D setze man, eben so, bey A, nach §. 385 einen rechten Winkel D A E.

3°. Theile A B bey F nach §. 381 in zween gleiche Theile, und ziehe aus F auf A B nach §. 382 eine senkrechte Linie F G, bis sie den Schenkel, A E, des rechten Winkels, D A E, in G trift.

4°. Beschreibe aus G mit G A oder G B einen Kreis A B E I H A, so ist der Abschnitt A H I E B desselben, der verlangte Kreis-Abschnitt, indem ein jeder Winkel, welcher wie A I B in denselben eingeschrieben werden kann, den gegebenen Winkel C gleich ist.

Diese Zeichnung gründet sich auf §. 165. 185. 196, und wird leicht eingesehen, wenn

man nur A B als eine Sehne, und A D als eine Berührungslinie des Kreises betrachtet.

Anmerkung. Es ist leicht, hieraus das Verfahren zu beurtheilen, welches man beobachten muß, wenn der gegebene Winkel ein rechter oder ein stumpfer Winkel ist.

§. 395.

Auf eine gegebene grade Linie, durch den äussersten Punkt derselben, eine andere senkrecht zu stellen. (§. 381).

Tab. VIII.

Es sey A B fig. 227 die gegebene grade Linie, durch deren äussersten Punkt A eine andere grade Linie, auf dieselbe senkrecht, gestellt werden soll.

1°. Nehme man einen willkührlichen Punkt C, über oder unter, der gegebenen graden Linie A B an.

2°. Beschreibe mit C A den Kreis A D E, und bemerke den Punkt E, wo derselbe die grade Linie A B schnitt.

3°. Von E ziehe man durch C die grade Linie E D, bis sie den aus C beschriebenen Kreis, A D E, in D trift.

4°. Von D nach A werde D A gezogen, so ist D A auf A B in A senkrecht.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 190 und wird völlig eingesehen, wenn man nur erwäget daß D E ein Durchmesser des aus C beschriebenen Kreises A D E ist.

§. 396.

§. 396.

An einen bestimmten Punkt der Kreislinie, eine Berührungslinie des Kreises zu ziehen. (§. 372).

Es sey fig. 228 der Kreis, und A der Punkt in der Kreislinie, wo eine Berührungslinie des Kreises gezogen werden soll. Tab. VIII.

1°. Suche man den Mittelpunkt C des gegebenen Kreises, nach §. 389, wenn derselbe nicht zugleich mitgegeben ist.

2°. Ziehe von C nach A den Halbmesser CA, und errichte in dessen äussersten Punkt, auf CA nach vorigen §, die senkrechte Linie AB: so ist AB die zu dem Punkte A gehörige Berührungslinie des Kreises.

Dies Verfahren ist nach §. 184. 185 klar.

§. 397.

Von einem gegebenen Kreise einen Abschnitt zu machen, der einen Winkel enthalte, welcher einem gegebenen gleich sey. (III Prop. 34).

Es sey AFGEA fig. 229 der gegebene Kreis, und D der gegebene Winkel. Tab. VIII.

1°. An einen beliebigen Punkt A des gegebenen Kreises ziehe man nach vorigen §. eine Berührungslinie BC.

2°. Bey A setze man, an A C, nach §. 385, einen Winkel E A C gleich dem gegebenen Winkel D, und ziehe den Schenkel A E dieses Winkels, so weit, bis er die Kreislinie der gegebenen Kreisfläche in E schnitt, so theilet dieser Schenkel die gegebene Kreisflächen in zween Abschnitte A F G E A, A H E A davon der erste der verlangte ist, indem ein jeder Winkel, der sich in denselben, wie A F E, oder A G E einschreiben läßt, den gegebenen Winkel D gleich ist.

Diese Zeichnung gründet sich auf §. 196, und wird daraus ohne viel Nachdenken eingesehen.

§. 398.

In einen gegebenen Kreis ein Dreyeck zu beschreiben, daß mit einem gegebenen einerley Winkel habe. (V Prop. 2).

Tab. VIII. Es sey a b c a fig 230 der gegebene Kreis, und A B C das Dreyeck.

1°. An einen beliebigen Punkt e des gegebenen Kreises ziehe man eine Berührungslinie d e des Kreises nach §. 396.

2°. Setze bey c, an c d, einen Winkel b c d, gleich einem Winkel A des gegebenen Dreyeckes A B C, und an c e einen andern Winkel a c e, eben so groß, als ein anderer Winkel B des gegebenen Dreyeckes.

3°. Die Schenkel c b, c a der Winkel b c d, a c e verlängere man, bis sie den Umkreis des gegebenen

gebenen Kreises in b, und a schneiden, und ziehe die Punkte a , b mit der graden Linie a b zusammen, so ist das Dreyeck a b c, welches hierdurch im Kreise entsteht, das verlangte Dreyeck, indem a = A, b = B, c = C.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 196, und wird mit Zuziehung der §. 110. 126 völlig eingesehen.

§. 399.

Um einen gegebenen Kreis, ein Dreyeck zu beschreiben, das mit einem gegebenen, einerley Winkel habe. (IV Prop. 3).

Es sey F G H fig. 231 der gegebene Kreis, Tab. VIII. und A B C das Dreyeck.

1°. Verlängere man eine Seite, wie hier A C des gegebenen Dreyeckes A B C auf beyden Seiten bis in D und E.

2°. Suche den Mittelpunkt K des gegebenen Kreises, nach §. 389, woferne derselbe nicht gegeben ist, und ziehe von K nach dem Umkreise eine grade Linie K F willkührlich.

3°. Setze an K F in K nach §. 385 einen Winkel G K F = E A B, und einen andern F K H = B C D.

4°. Ziehe an F, G und H, nach §. 396, die Berührungslinien des Kreises a c, a b, b c, und verlängere dieselben bis sie sich in a , b , c schneiden, so ist a b c das verlangte Dreyeck, indem a = A, b = B und c = C ist.

Die-

Diese Zeichnung beruhet auf §. 110. 126. 131 und 184, und wird daraus völlig eingesehen.

§. 400.

In ein gegebenes Dreyeck einen Kreis zu beschreiben. (IV Prop. 4).

Tab. VIII. Es sey A B C fig. 232 das gegebene Dreyeck.

1°. Theile man zwey Winkel des gegebenen Dreyecks wie hier B und C nach §. 380 in zween gleiche Theile, durch die graden Linien B d, C d, und merke den Punkt d, wo sich die graden linien B d, C d einander schneiden.

2°. Ziehe von d nach §. 283 auf die Seiten A B, B C, A C des gegebenen Dreyeckes die senkrechten linien d f, d e, d g, oder merke bloß die Punkte f, e, g, wo die aus d auf A B, B C, A C gezogene senkrechte Linien hinfallen würden.

3° Beschreibe aus d mit der Oefnung d f oder d e, oder d g einen Kreis, so ist das Dreyeck um den Kreis, oder der Kreis in das Dreyeck beschrieben, §. 70, so wie verlangt worden.

Diese Zeichnung wird leicht mit Zuziehung des §. 136 eingesehen.

§. 401.

Um ein gegebenes Dreyeck einen Kreis zu beschreiben. (IV Prop. 5).

Es

Es sey A B C fig. 233 das gegebene Dreyeck. Tab. VIII.

1°. Theile man zwo Seiten des gegebenen Dreyecks, wie hier B C, A C, nach §. 381 durch die senkrechte Linien F D, F E bey D und E in zween gleiche Theile, und merke den Punkt F, wo sich diese grade Linien, nachdem sie genugsam verlängert worden, schneiden.

2°. Beschreibe mit der Entfernung F A oder F B oder F C, welche Entfernungen einander gleich sind, aus F einen Kreis durch A B C, so ist das Dreyeck in den Kreis oder der Kreis um das Dreyeck beschrieben §. 70, so wie verlangt worden.

Der Grund dieses Verfahrens beruhet auf §. 135, und wird leicht eingesehen, wenn man sich von F nach A, B und C grade Linien gedenket, und ist eigentlich einerley mit der §. 391 erklärten Zeichnung.

§. 402.

In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges oder ordentliches Dreyeck zu beschreiben.

Es sey der gegebene Kreis A B C E A fig. 234. Tab. VIII.

1°. Suche man den Mittelpunkt D nach §. 389, wenn derselbe nicht bekannt ist.

2°. Ziehe aus D bis an den Umkreis einen beliebigen Halbmesser, wie hier D E, und trage denselben in den Umkreis sechsmal herum, nehmlich aus A in F aus F in B u. s. w.

3°. Ver-

3°. Vereinige von den gefundenen Punkten den ersten mit dem dritten, den dritten mit dem fünften, und den fünften wieder mit dem ersten, wie hier, A, B; B, C; C, A durch grade Linien, so bilden dieselbe das verlangte gleichseitige Dreyeck A B C in den gegebenen Kreis.

Der Grund dieses Verfahrens beruhet auf §. 182. 199, und wird leicht eingesehen, wenn man sich noch von A nach F, von F nach B, von B nach G u. s. w. grade Linien gedenket.

§. 403.

In einen gegebenen Kreis ein ordentliches Viereck zu beschreiben. (IV Prop. 6).

Tab. VIII. Es sey a b c d a fig. 235 der gegebene Kreis, und e der gegebene oder nach §. 389 gefundene Mittelpunkt.

1°. Ziehe man zwey Durchmesser b d, a c, welche einander senkrecht halbiren nach §. 381, oder bemerkt bloß die Punkte a, b, c, d, wo diese Durchmesser die Kreislinie schneiden würden.

2°. Vereinige die gefundene Punkte a, b, c, d, durch grade Linien a b, b c, c d, d a, so schliessen dieselbe das ordentliche Viereck a b c d ein, welches zufolge §. 70 in den gegebenen Kreis eingeschrieben ist, so wie verlangt worden.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 135.

§. 404.

§. 404.

Um einen gegebenen Kreis ein ordentliches Viereck zu beschreiben. (IV Prop. 7).

Es sey ABCDA fig. 236 der gegebene Kreis, und der Mittelpunkt E desselben gegeben, oder nach §. 389 gefunden. Tab. VIII.

1°. Ziehe man in den Kreis nach §. 381 zwey Durchmesser, AC, BD, welche sich senkrecht schneiden, oder bemerke bloß die Punkte A, B, C, D wo diese Durchmesser die Kreislinie schneiden würden.

2°. Ziehe zu den gefundenen Punkten A, B, C, D, die Berührungslinien des Kreises ad, ab, bc, cd, und verlängere dieselbe, bis sie sich in a, b, c, d schneiden, so entsteht hierdurch das verlangte ordentliche um den gegebenen Kreis beschriebene Viereck abcd.

Dieses Verfahren gründet sich auf §. 202, und wird mit Zuziehung des §. 163 völlig eingesehen.

§. 405.

In ein gegebenes ordentliches Viereck einen Kreis einzuschreiben. (IV Prop. 8).

Es sey das ordentliche Viereck ABCD fig 237 gegeben. Tab. VIII.

1°. Halbire man nach §. 381 zwo aneinander liegende Seiten AD, AB des ordentlichen Vierecks in a und b, mittelst der senkrechten Linien ca, db, und bemerke den Punkt e wo sich diese senkrechte Linien schneiden.

2°. Beschreibe aus e mit der Oefnung ea oder eb einen Kreis adcba, welchen die Seiten AD, AB, BC, CD des ordentlichen Vierecks ABCD, in a, b, c, d berühren werden, und der zufolge §. 70 in dem ordentlichen Viereck, wie verlangt worden, eingeschrieben ist.

Der Grund dieser Zeichnug beruhet auf §. 133, und wird mit Zuziehung des §. 233 leicht eingesehen.

§. 406.

Um ein gegebenes ordentliches Viereck einen Kreis zu beschreiben. (IV Prop. 9).

Tab. VIII. Es sey das gegebene ordentliche Viereck ABCD fig. 238.

1°. Ziehe man die beyden Querlinien AC, BD des ordentlichen Vierecks, oder bemerke bloß den Punkt E, wo sich diese Querlinien schneiden würden.

2°. Beschreibe aus den gefundenen Punkt E, mit der Oefnung EA, einen Kreis, so wird derselbe durch die Punkte A, B, C, D gehen, folglich der verlangte, um das gegebene ordentliche Viereck ABCD, beschriebene Kreis seyn.

Die-

Diese Zeichnung gründet sich auf §. 137. 145, und wird daraus leichte eingesehen.

§. 407.

Auf einer gegebenen graden Linie ein gleichschenklichtes Dreyeck zu beschreiben, davon die gegebene Linie ein Schenkel, und ein jeder Winkel an der Grundlinie grade noch einmal so groß sey, als der Winkel an der Spitze. (IV Prop. 10).

Es sey AB fig. 239 die gegebene grade Linie. Tab. VIII.

1°. Zerfälle man AB nach §. 388 in zween Theile, dergestalt, daß ein ordentliches Viereck auf DB beschrieben einem Rechtecke, von AB und AD eingeschlossen, gleich sey.

2°. Beschreibe aus A mit DB einen Kreisbogen gh, und aus B mit AB einen andern Kreisbogen ef, oder bemerke bloß den Punkt C wo der letzte Kreisbogen den ersten schneiden würde.

3°. Ziehe von dem gefundenen Punkte C nach A und B die grade Linien CA, CB, so ist ACB das verlangte Dreyeck.

Diese Zeichnung kann am leichtesten nach §. 238. 241 eingesehen werden, wenn man sich nur von C nach D eine grade Linie gedenket, und auf die Bedingung Rücksicht nimmt, nach welcher AB getheilet worden.

§. 408.

In einen gegebenen Kreis ein ordentliches Fünfeck einzuschreiben. (IV Prop. 11).

Tab. VIII. Es sey ABCDEA fig. 240 der gegebene Kreis.

1°. Mache man nach vorigen §. ein gleichschenklichtes Dreyeck, in welchem jeder Winkel an der Grundlinie doppelt grösser als der Winkel an der Spitze sey.

2°. Beschreibe nach §. 398 in den gegebenen Kreis ABCDEA ein Dreyeck ACD dessen Winkel einerley mit dem nach 1° beschriebenen Dreyecke seyn.

3°. Die Winkel C und D des, im gegebenen Kreise, eingeschriebenen Dreyeckes halbire man nach §. 380, durch die grade linien CE, DB, welche so weit gezogen werden müssen, bis sie den Umkreis in B und E schneiden.

4°. Ziehe endlich die gefundene Punkte A, B, C, D, E durch die grade linien AB, BC, CD, DE, EA zusammen, so ergiebt sich das verlangte, im Kreise eingeschriebene, ordentliche Fünfeck.

Dieses Verfahren beruhet auf §. 188. 197.

Anmerkung. Um in einen jeden gegebenen Kreis ein ordentliches Fünfeck einzuschreiben, kann man daher, ein für allemal, nach §. 407 ein gleichschenklichtes Dreyeck be-

schreiben, in welchem jeder Winkel an der Grundlinie doppelt grösser als der Winkel an der Spitze eben dieses Dreyeckes sey. Und dies ein für allemal beschriebene Dreyeck gebrauchen, um in jeden andern gegebenen Kreis nach dem hier beschriebenen Verfahren ein ordentliches Fünfeck einzuschreiben.

§. 409.

Um einen gegebenen Kreis ein ordentliches Fünfeck zu beschreiben. (IV Prop. 12).

Es sey ABCDEA fig. 241 der gegebene Kreis. Tab. VIII.

1°. Beschreibe man nach vorigen §. in den gegebenen Kreis ein ordentliches Fünfeck, und bestimme dadurch in den gegebenen Kreis die Punkte A, B, C, D, E, welche die Winkelpunkte des eingeschriebenen ordentlichen Fünfecks vorstellen.

2°. Ziehe durch die hierdurch bestimmte Punkte A, B, C, D, E nach §. 396 die Berührungslinien ae, ab, bc, cd, de, so weit, bis diese sich in a, b, c, d, e schneiden, so ergiebt sich das um den gegebenen Kreis beschriebene ordentliche Fünfeck abcde wie verlangt worden.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 202.

§. 410.

In ein gegebenes ordentliches Fünfeck einen Kreis einzuschreiben. (IV Prop. 13).

Tab. VIII.

Es sey ABCDE fig. 242 das gegebene ordentliche Fünfeck.

1°. Theile man nach §. 380 zwey Winkel des ordentlichen Fünfecks, wie hier B, C durch grade linien Bf, Cf in zween gleiche Theile, und bemerke den Punkt f, wo sich die beyden graden linien, welche die Winkel halbiren, schneiden.

2°. Von dem gefundenen Punkte f ziehe man, auf eine Seite des ordentlichen Fünfeckes, nach §. 383, eine senkrechte linie, wie hier fc, und beschreibe aus f mit fc einen Kreis cdeab, welcher das gegebene ordentliche Fünfeck in c, d, e, a, b berühren, und der verlangte Kreis seyn wird.

Der Grund dieses Verfahren beruhet auf §. 200 und wird mit Zuziehung des §. 198 leicht eingesehen, wenn man sich nur noch von f nach D, E, A sowohl als nach d, e, a, b grade linien gezogen, gedenket.

§. 411.

Um ein gegebenes ordentliches Fünfeck einen Kreis zu beschreiben. (IV Prop. 14).

Es sey abcde fig. 243 das gegebene ordentliche Fünfeck um welches ein Kreis beschrieben werden soll. Tab. VIII.

1°. Theile man nach §. 380 zwey beliebige Winkel, wie hier d, e durch grade linien df, ef, und verlängere diese, bis sie sich in f schneiden.

2°. Beschreibe aus f mit der Entfernung fd oder fe einen Kreis, so wird derselbe durch alle Winkelpunkte a, b, c, d, e des gegebenen Fünfecks gehen, und folglich nach §. 69 um das gegebene Fünfeck beschrieben seyn.

Diese Zeichnung gründet sich auf §. 198, und wird mit Hülfe der daselbst gemachten Anmerkung sehr leicht eingesehen.

§. 412.

In einen gegebenen Kreis ein ordentliches Sechseck einzuschreiben. (IV Prop. 15).

Es sey ABCDEFA fig. 244 der gegebene Kreis in welchen ein ordentliches Sechseck soll eingeschrieben werden. Tab. VIII.

1°. Ziehe man durch den Mittelpunkt G des gegebenen Kreises einen beliebigen Durchmesser wie hier AD.

2°. Beschreibe aus D mit DG einen Kreisbogen, oder bemerke bloß die Punkte C, E, wo dieser aus D beschriebene Kreisbogen CGE den Umkreis des gegebenen Kreises schneiden würde.

3°. Lege ein Linial an C und G, und bemerke im Umkreise den Punkt F, eben so verfahre man bey E und G um den Punkt B zu bestimmen.

4°. Ziehe endlich die dergestalt entdeckte Punkte A, B, C, D, E, F durch grade Linien AB, BC, CD, DE, EF, FA zusammen, so ist ABCDEF das verlangte ordentliche Sechseck.

Diese Zeichnung gründet sich auf §. 199, und wird daraus ohne vieles Nachdenken leicht eingesehen, besonders, wenn noch §. 114. 160 mit zur Hülfe genommen werden.

§. 413.

In einen gegebenen Kreis ein ordentliches Funfzehneck einzuschreiben. (IV Prop. 16).

Tab. VIII. Es sey abcdefghiklmnopa fig. 245 der gegebene Kreis.

1°. Beschreibe man nach §. 402 in den gegebenen Kreis ein ordentliches Dreyeck afl oder nur dessen eine Seite af.

2°. Verzeichne in eben diesen Kreis nach §. 408. ein ordentliches Fünfeck adgkn, oder nur dessen eine Seite ad.

3°. Theile den, zwischen den hierdurch entdeckten Punkten, d und f, enthaltenen Bogen def, bey e in zween gleiche Theile de, ef und ziehe zu diesen Bögen die Sehnen de, ef.

4°. Setze

4°. Setze an einander die Sehnen dc, cb, ba, und so weiter, jede eben so groß, als die Sehne de oder ef, so ist das verlangte Funfzehneck in den gegebenen Kreis beschrieben.

Diese Zeichnung wird leicht mit Hülfe der §. 181. 188 richtig eingesehen, wenn man nur bedenkt, daß immer der dritte Theil eines Ganzen weniger den fünften Theil eben des Ganzen so viel als zwey funfzehn Theile desselben beträgt.

Anmerkung. Auf gleiche Art wie bey dem ordentlichen Fünfeck §. 409. 410. 411, wird auch ein ordentliches Dreyeck, Sechseck oder Funfzehneck, um einen gegebenen Kreis, oder ein Kreis in und um ein gegebenes ordentliches Dreyeck, Sechseck oder Funfzehneck beschrieben.

§. 414.

Ueber eine gegebene grade Linie ein jedes ordentliches Vieleck zu beschreiben, vorausgesetzt daß der rechte Winkel in jede beliebige Anzahl gleicher Theile zerfället werden könne. (§. 397).

Es sey DE fig. 246 die gegebene grade Linie über welche ein Vieleck, zum Beyspiel von sieben Seiten, beschrieben werden soll. Tab. VIII.

1°. Berechne man nach §. 131 durch den Ausdruck $\frac{2n-4}{n}$ denjenigen Theil eines rechten

Winkels, welchen ein jeder Winkel der verlangten Figur gleich seyn muß, aus der Anzahl der gegebenen Seiten, oder vielmehr durch den Ausdruck $\frac{n-2}{n}$ die Helfte dieses gesuchten Winkels; folglich da hier $n = 7$, so ist die Helfte eines jeden Winkels eines ordentlichen Siebenecks $= \frac{5}{7}$ eines rechten Winkels.

2°. Daher theile man einen rechten Winkel dadurch in sieben gleiche Theile, daß man aus der Spitze desselben zwischen seinen Schenkeln einen Bogen beschreibt, diesen in sieben gleiche Theile durch Versuche zerfällt, und von jeden Theilungspunkte nach der Spitze des rechten Winkels grade Linien zieht; und von diesen sieben gleichen Theilen behalte man nur fünf für den gesuchten halben Winkel des ordentlichen Siebeneck.

3°. Setze den hierdurch entdeckten halben Winkel des ordentlichen Siebeneck, bey die äussersten Punkte D, E, an die gegebene grade Linie DE an, und verlängere die Schenkel DH, EH, dieser an DE gesetzten Winkel, bis sie sich in H schneiden.

4°. Beschreibe mit einer Oefnung des Zirkels $=$ HD einen Kreis, und setze die grade Linie DE so oft aus E nach F, aus F nach G u. s. w. in denselben herum bis man wieder an D kömmt, so ist DEFGABC das verlangte ordentliche Siebeneck.

Diese Zeichnung gründet sich auf §. 198, und wird mit Zuziehung des §. 163 leicht eingesehen.

Anmerkung. Es kann daher, wenn die Eintheilung des Umkreises einer Kreisfläche, in jede beliebige Anzahl gleicher Theile, nach §. 197, als möglich, vorausgesetzt wird, sowohl in jeden gegebenen Kreis, als auf jede gegebene grade Linie, ein jedes beliebiges ordentliches Vieleck beschrieben werden, und hieraus ist leicht zu beurtheilen, wie um jeden gegebenen Kreis ein beliebiges ordentliches Vieleck beschrieben werden könne, oder wie sich ein Kreis in und um jedes gegebene Vieleck beschreiben lasse.

§. 415.

Eine gegebene grade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu zerfällen. (§. 402) (VI Prop. 9).

Es sey A B fig. 247 die gegebene grade Linie, und die Anzahl der Theile auf fünfe bestimmt. Tab. VIII.

Erste Auflösung. 1°. Ziehe man zwo grade Linien C D, C E von unbestimmter Länge, die sich in C unter einem beliebigen Winkel schneiden.

2°. Auf einen der beyden Schenkel des hierdurch entstandenen Winkels D C E, wie hier

auf

auf CD, trage man so viele gleiche Theile von willkührlicher Größe als AB erhalten soll, von C in 1, von 1 in 2 u. s. w. Auf den andern Schenkel CE eben dieses Winkels hingegen nehme man C 5 = AB.

3°. Ziehe die Punkte 5.5 durch eine grade linie 5.5. zusammen, durch die Punkte 4. 3.2.1. des Schenkels CD aber, mit 5.5, die gleichlaufenden linien 4.4, 3.3, 2.2, 1.1, nach §. 386, bis sie den andern Schenkel CE in 4.3.2.1 schneiden, so ist auf den Schenkel CE, C 1 = $\frac{1}{5}$ AB, C 2 = $\frac{2}{5}$ AB, C 3 = $\frac{3}{5}$ AB, C 4 = $\frac{4}{5}$ AB und C 5 = $\frac{5}{5}$ AB = AB. Werden demnach die Theile C 1, C 2, C 3, C 4, C 5 des Schenkels CE auf AB getragen, so wird AB in fünf gleiche Theile, wie verlangt worden, eingetheilet.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 234.

Will man aber das öftere Ziehen der gleichlaufenden linien vermeiden, welches ohne andere Werkzeuge als linial und Zirkul, immer etwas beschwerlich ist, so dienet folgendes Mittel.

Tab. VIII. Zwote Auflösung. 1°. Beschreibe man wie bey der ersten Auflösung einen geradlinigten Winkel c a b fig. 248, und trage auf den einen Schenkel a c dieses Winkels so viele gleiche Theile, von willkührlicher Größe, als die gegebene linie AB fig. 247 erhalten soll, auf den andern Schenkel a b aber die grade linie AB selbst.

2°. Setze

2°. Setze nach §. 385 an a b in b einen Winkel a b d von eben der Größe als c a b, und trage von b gegen d eben so viele gleiche Theile, und von eben der Größe, als die Theile sind, welche von a gegen c getragen worden

3°. Bezeichne die Theile der Schenkel ac, b d, so wie es die Figur zeiget, und ziehe die mit gleichen Zahlen bemerkte Punkte mit graden Linien zusammen, so theilen dieselbe die grade Linie a b, nnd folglich auch A B in die verlangte Anzahl gleicher Theile.

Diese Zeichnung gründet sich ausser §. 234 noch auf §. 233.

In vielen Fällen kann endlich auch folgendes Verfahren gut gebraucht werden.

Dritte Auflösung. 1°. Ziehe man eine grade Linie F Z fig. 249 von unbestimmter Länge, und trage auf dieselbe von F gegen Z, so viele gleiche Theile, von willkührlicher Größe, als die gegebene Linie A B fig. 247 erhalten soll. Tab. VIII.

2°. Beschreibe, wenn G der letzte aufgetragene Punkt ist, über F G nach §. 378 ein gleichseitiges Dreyeck F H G.

3°. Schneide die graden Linien H a = H b = A B fig. 247, von der Spitze H aus, von den Schenkeln H F, H G gehörig ab, und ziehe die hierdurch bestimmte Punkte a, b mit einer grade Linie a b zusammen, nach den Theilungspunkten der Grundlinie aber aus der Spitze H die graden Linien H 1, H 2, H 3, H 4, so wird a b nicht nur gleich an A B fig. 247,

sondern auch bey 1.2.3.4 in eben so viele gleiche Theile als F G zerfället seyn. Und es ist demnach leicht, nun auch A B selbst, in die verlangte Anzahl gleicher Theile einzutheilen.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 237, und wird leicht eingesehen.

Anmerkung. Aus diesen drey verschiedenen Auflösungen ist leicht zu begreifen, wie eine gegebene grade Linie, in eben dem Verhältniß, wie eine andere bereits getheilte, zerfället werden könne. Am leichtesten wird dieses immer durch die letzte Zeichnung erhalten, wenn man die gegebene und bereits getheilte grade Linie zur Grundlinie des gleichseitigen Dreyeckes annimmt, von dessen Spitze nach den Theilungspunkten der Grundlinie grade Linien zieht, und die gegebene Linie, welche in eben dem Verhältniß wie die Grundlinie eingetheilet werden soll, von der Spitze auf die beyden Schenkel des gleichseitigen Dreyeckes trägt, und die Endpunkte zusammenzieht.

§. 416.

Zu dreyen gegebenen graden Linien eine vierte zu finden, welche das vierte Glied einer Verhältnißgleichung zu den dreyen gegebenen Linien sey. (VI Prop. 12) (§. 408).

Es seyn a, b, c fig. 250 die drey gegebe- Tab. VIII.
nen graden Linien.

1°. Beschreibe man einen beliebigen Winkel A, trage auf den einen Schenkel desselben aus A wie hier aus A in B die erste der gegebenen graden linien a, auf den andern Schenkel aber aus A in C die zwote gegebene linie b, und ziehe die hierdurch gefundene Punkte B, C mit einer graden linie BC zusammen.

2°. Trage die dritte gegebene linie c auf eben den Schenkel, auf welchen die erste a ist getragen worden, demnach hier auf den Schenkel AB aus A in D, und ziehe durch den hierdurch gefundenen Punkt D nach §. 386 eine gleichlaufende linie DE, so wird dieselbe von den andern Schenkel AC das Stück AE abschneiden, welches die gesuchte vierte verhältnißmäßige grade linie seyn wird.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 237, und wird leicht eingesehen, wenn man nur erwäget. daß AB = a, AC = b, und AD = c genommen worden.

Anmerkung. Es ist hieraus leicht einzusehen, wie zu zwoen gegebenen graden linien, eine dritte verhältnißmäßige grade linie gefunden werden könne. Denn in diesem Falle wird eben so wie bey dreyen gegebenen graden linien verfahren, nur mit dem Unterschiede, daß, statt einer dritten gegebenen graden linie, die zwote, nachdem sie wie gewöhnlich auf den andern

Schen-

Schenkel des gegebenen Winkels ist getragen worden, noch einmahl auf denjenigen Schenkel getragen wird, auf welchen die erste der beyden gegebenen graden Linien ist abgeschnitten worden.

§. 417.

Eine grade Linie zu finden, deren Verhältniß zu einer andern gegebenen oder nach Willkühr angenommenen graden Linie, aus mehrern Verhältnißen, welche alle durch grade Linien gegebenen sind, zusammengesetzt sey. (§. 410).

Tab. VIII. Es seyn a, b, c, d, e, f fig. 251 die graden Linien, welche die Verhältniße a : b, c : d, e : f bezeichnen, A hingegen die gegebene oder willkührlich angenommene grade Linie, zu welcher eine andere gesucht wird, so, daß das Verhältniß der Linie A zur gesuchten, aus den Verhältnissen a : b, c : d, e : f zusammengesetzt sey.

1°. Suche man zu den dreyen Linien a, b und A nach vorigen §. eine vierte verhältnißmäßige grade Linie B.

2°. Eben so zu c, d und B eine vierte grade Linie C.

3°. Und endlich durch eben dies Verfahren zu e, f und C eine vierte grade Linie D, so ist das Verhältniß der graden Linien A und D, aus den Verhältnissen a : b, c : d, e : f der gegebenen graden Linien a, b, c, d, e, f zusammengesetzt.

Die-

Dieses Verfahren gründet sich auf §. 75, und wird leicht eingesehen, wenn man nur erwäget daß nach der Zeichnung

A : B = a : b
B : C = c : d
C : D = e : f

ist genommen worden.

Anmerkung. Durch dieses Mittel läßt sich jede beliebige Anzahl gegebener Verhältnisse zusammensetzen. Und es ist leicht einzusehen, wie verfahren werden müsse, wenn ein Verhältniß zwoer graden Linien gesucht wird, welches 2 . 3 . 4, oder überhaupt n mal höher, als das Verhältniß zwoer gegebenen graden Linien sey. Denn wenn bey fig. 351, a : b = c : d = e : f wäre genommen, und nach dem hier erklärten Verfahren zu einer gegebenen oder angenommenen graden Linie A, eine andere D gesucht worden, so würde auch das Verhältniß A : D dreymal höher seyn, als ein jedes der gegebenen einander gleichen, aber einfachen Verhältnissen a : b ; c : d ; e : f.

§. 418.

Ein Dreyeck zu beschreiben, dessen Seiten alle, in einem gegebenen Verhältniß grösser oder kleiner als die Seiten eines andern gegebenen Dreyeckes seyn. (§. 422).

Tab. VIII.

Es sey ABC fig. 252 das gegebene Dreyeck, und das neue Dreyeck dergestalt zu beschreiben, daß jede Seite desselben, sich zur ähnlichliegenden Seite des gegebenen Dreyeckes, wie 3 zu 7 verhalte.

Erste Auflösung. 1° Theile man, nach §. 415 eine beliebige Seite des gegebenen Dreyeckes ABC, wie hier die Seite AB in 7 gleiche Theile A 1, 1.2, 2.3 u. s. w.

2°. Ziehe durch den dritten Theilungspunkt 3, von der Spitze A angerechnet, eine gleichlaufende Linie 3.3′, mit der Seite BC des Dreyeckes ABC, so ist A.3.3′ das verlangte Dreyeck.

Diese Zeichnung gründet sich auf §. 237. 241.

Zwote Auflösung. 1°. Nachdem AB in 1.2.3 u. s. w. in 7 gleiche Theile zerfällt worden, so theile man auf eben die Art noch eine andere Seite des gegebenen Dreyeckes wie hier AC in 7 gleiche Theile A 1′, 1′.2′, 2′.3′ u. s. w.

2°. Ziehe den dritten Theilungspunkt 3 der Seite AB mit dem dritten Theilungspunkt 3′ der Seite AC durch die grade Linie 3.3′, zusammen, so ist A.3.3′ das verlangte Dreyeck.

Diese Zeichnung gründet sich allein auf §. 241.

Dritte Auflösung. 1°. Theile man alle drey Seiten AB, AC, BC des gegebenen

Drey=

Dreyeckes ABC in sieben gleiche Theile nach §. 415.

2°. Beschreibe mit den dreyen Theilen A 3, A 3', B 3'' nach §. 384 ein Dreyeck abc fig. 253, so ist geschehen was verlangt worden.

Der Grund dieses Verfahrens beruhet auf §. 242.

Anmerkung. Es ist hieraus leicht zu beurtheilen wie man verfahren müsse, wenn die Seiten des gesuchten Dreyeckes alle grösser werden sollen, als die Seiten des gegebenen. Denn man darf sich nur bey fig. 252 das Dreyeck A 3 . 3', als das gegebene, und ABC als das gesuchte vorstellen, so folgt das übrige von selbsten.

§. 419.

Auf eine gegebene grade Linie ein Dreyeck zu setzen, das einem andern gegebenen Dreyeck ähnlich sey.

Es sey ABC fig. 254 das gegebene Dreyeck, und bc fig. 255 die gegebene grade Linie. Tab. VIII.

Erste Auflösung. An die Punkte b und c der Linie bc setze man, nach §. 385, die Winkel b, c von eben der Größe als die Winkel B, C des gegebenen Dreyeckes ABC, und verlängere die Schenkel ba, ca bis sie sich in a schneiden, so ist abc das verlangte Dreyeck.

Dies Verfahren beruhet auf §. 240.

Zwote Auflösung. 1°. Setze man an den Punkt b der Linie bc einen Winkel abc = B nach §. 385.

2°. Trage von B gegen C die Linie Bγ = bc, und bemerke auf BA den Punkt α, wo eine, durch γ mit CA gleichlaufend gezogene grade Linie die Seite BA schneiden würde, und setze die grade Linie Bα auf den Schenkel ba aus b in a.

3°. Ziehe a und c mit einer graden Linie ac zusammen, so ist abc das verlangte Dreyeck.

Dies Verfahren gründet sich auf §. 237. 241.

Dritte Auflösung. 1°. Trage man wie bey der vorigen Auflösung bc aus B gegen C in γ, bemerke in BA den Punkt α wo eine durch γ mit AC gleichlaufende grade Linie die Seite BA schneiden würde, und eben so in AC den Punkte δ, wo eine durch α mit BC gleichlaufende Linie die Seite AC des gegebenen Dreyeckes schneiden würde.

2°. Beschreibe nach §. 384 mit den dreyen Linien Bγ = bc, Bα = ba und Cδ = ca das Dreyeck abc, so ist geschehen was verlangt worden.

Der Grund dieses Verfahrens beruhet auf §. 237. 242.

§. 420.

Auf einer gegebenen graden Linie ein Vieleck zu beschreiben, das einem gege-

gegebenen Vielecke ähnlich sey. (§. 424.) (IV Prop. 18).

Es sey ABCDEFG fig. 254 das gegebe- Tab. VIII.
ne Vieleck, und cd fig. 255 die gegebene grade linie.

Erste Auflösung. 1°. Zerfälle man das gegebene Vieleck durch willkührlich gezogene Querlinien in lauter Dreyecke, wie hier durch die Querlinien CA, CG, GD, DF in die Dreyecke ABC, ACG, GCD, DGF, FDE.

2°. Beschreibe nach vorigen §. über cd ein Dreyeck gcd dem Dreyecke GCD ähnlich, und auf eben die Art über gc und gd Dreyecke acg, gdf den Dreyecken ACG, GDF ähnlich, und fahre so weiter fort, so viele ähnliche Dreyecke an den bereits beschriebenen Theile acdfga, der Figur anzusetzen, als noch in der gegebenen Figur ABCDEFG vorhanden sind, so wird die hierdurch entstehende Figur abcde fg der vorgegebenen ähnlich seyn.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 250.

Zwote Auflösung. Es sey ABCDEF Tab. IX.
GH fig. 256 die gegebene Figur, und Bc die gegebene grade linie.

1°. Aus der Ecke B ziehe man die Querlinien der Figur, wie hier BD, BE, BF, BG, BH.

2°. Ziehe durch c mit CD eine gleichlaufende linie cd, bis sie die Querlinie BD in d schneide; eben so werde durch den hierdurch be-

stimmten Punkt d, mit DE, eine gleichlaufende linie de so weit gezogen, bis sie die Querlinie BE in e anfängt zu schneiden, und so gehe man weiter, bis die mit HA gezogene gleichlaufende linien ha die Seite AB der gegebenen Figur in a begegnet, so ist Bcdefgha die verlangte Figur.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 244. 250.

Tab. IX. Dritte Auflösung. Es sey ABCDE fig. 257 die gegebene gradlinigte Figur, und das Verhältniß in welchem die Seiten und der Umkreis der gegebenen Figur verkleinert werden sollen = 2 : 5.

1°. Aus einem beliebigen Punkt F innerhalb, oder, wie hier, ausserhalb der gegebenen Figur, ziehe man nach jeder Ecke der Figur eine grade linie, dergleichen hier die graden linien FA, FB, FC, FD, FE sind, und theile alle diese linien bey a, b, c, d, e in dem gegebenen Verhältniß 2 : 5 nach §. 416.

2°. Ziehe die hierdurch gefundene Punkte a, b, c, d, e mit graden linien ab, bc, cd, de, ea zusammen, so entsteht die Figur abcde welche der gegebenen nicht allein ähnlich ist, sondern bey welcher auch eine jede Seite, sowohl als ihr ganzer Umkreis zwey fünftheile der gegebenen betragen.

Diese Zeichnung gründet sich auf §. 241. 250.

Anmerkung. Aus den dreyen verschiedenen hier erklärten Auflösungen, erhellet genugsam, wie verfahren werden müsse, wenn die zu zeichnende Figur grösser, als die gegebene werden soll. Die dritte Auflösung lässet sich insbesondere sehr nützlich bey der Verzeichnung ähnlicher krummlinigter Figuren gebrauchen, wie sogleich mit mehrern aus folgender Aufgabe erhellen wird.

§. 421.

Eine Figur zu zeichnen, welche einer gegebenen krummlinigten ähnlich sey, und deren Umkreis zum Umkreise der gegebenen Figur ein bestimmtes Verhältniß habe.

Es sey ABCD fig. 258 die krummlinigte Tab. IX. Figur und das Verhältniß ihres Umkreises zur neuen zu zeichnenden Figur wie 7 zu 5 bestimmt.

1°. Aus einem willkührlichen Punkt E, innerhalb der gegebenen Figur, ziehe man so viele grade Linien bis an den Umkreis, als gefällig, theile eine jede dieser graden Linien in sieben gleiche Theile, und nehme von diesen Theilen, von E angerechnet, fünf Theile.

2°. Alle gefundene Punkte ziehe man, je zwey und zwey so zusammen, daß die Linien, welche diese Punkte miteinander verbinden, denen so in Umkreise der gegebenen Figur die End-

punkte der aus E gezogenen Linien verbinden, ähnlich werden, als welches immer mit desto mehrerer Schärfe geschehen kann, in je mehrere Punkte der Umkreis der gegebenen Figur ist zertheilet worden, so entsteht eine Figur a b c d welche der gegebenen ähnlich ist, und der Umkreis der gegebenen wird sich zum Umkreise der gezeichneten Figur auch wie 7 zu 5 verhalten.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 239.

Anmerkung. Da es überaus beschwerlich seyn würde eine jede der aus E gezogenen graden Linien in dem Verhältniß 7 : 5 zu theilen, so kann man eine einzige wie hier EA bey a in diesem Verhältniß theilen, und nachdem dieses geschehen, von neuem sowohl A E, als auch a E in 10, oder 100, oder 1000, oder noch in mehrere gleiche Theile zerfällen, und gleichsam mit diesen Linien Maaßstäbe verfertigen, um mit dem ersten, welcher mit A E ist gemacht worden, die aus E, bis an den Umkreis der gegebenen Figur gezogenen graden Linien auszumessen, mit dem andern aber, eben so viele Theile von E aus, auf jede Linie aufzutragen als nach dem ersten Maaßstabe sind gefunden worden. Hätte man aber zwey schon getheilte Maaßstäbe, deren Längen sich wie 7 zu 5 verhalten, bey der Hand, so darf man nur eine jede grade Linie wie AE, BE, CE, DE auf den

ersten Maaßstabe messen, und eben so viele Theile, als man auf diesen Maaßstabe findet, nach dem zweyten Maaßstabe aus E auf EA, EB, EC, ED bis in a, b, c, d tragen, und eben so bey allen übrigen Linien verfahren, so werden sich die Punkte ergeben, durch welche die krumme Linie abcd gezogen werden muß.

§. 422.

Zu zwoen gegebenen graden Linien zwo andere zu finden, deren Unterschied einer gegebenen graden Linie gleich sey, und welche, wenn die zwo ersten Linien zu äussern Gliedern genommen werden, die mittlern Glieder einer Verhältnißgleichung bestimmen. (§. 443).

Es seyn a, b fig. 259 die zwo gegebene grade Linien, und d der Unterschied der gesuchten Linien. Tab. IX.

1°. Ziehe man zwo grade unbegrenzte Linien AB, CD auf einander senkrecht, und merke den Punkt E, wo sie sich schneiden.

2°. Trage aus E gegen C bis in F die gegebene Linie a und von E gegen D, bis in G, die andere gegebene grade Linie b, dergestalt daß EF = aEG = b werde.

3°. Nehme von E gegen B, EH = d, theile EH in I, sowohl als FG in K, in zween

gleiche Theile, und beschreibe mit EI urd EK das Rechteck EILK nach §. 387.

4°. Beschreibe aus L mit LF einen Kreis, so wird derselbe nicht nur durch G gehen, sondern auch die graden Linien ME, EN bestimmen, welches die gesuchten seyn werden.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 164. 165. 261, und wird völlig eingesehen, wenn man nur erwäget, daß EN — ME = d, und a : ME = EN : b seyn muß.

§. 423.

Zu zwoen gegebenen graden Linien zwo andere zu finden, deren Summe einer gegebenen graden Linie gleich sey, und welche, wenn die zwo zuerst gegebenen Linien zu äussern Glieder genommen werden, die mittlern Glieder einer Verhältnißgleichung bestimmen. (§. 447).

Tab. IX. Es seyn α, β fig 260 die beyden gegebenen graden Linien, und die Linie σ stelle die Summe der beyden gesuchten Linien vor.

1°. Ziehe man von einem beliebigen Punkt A zwo grade Linien AB, AC, von unbestimmter Länge, auf einander senkrecht.

2°. Trage auf AC von A in D die Linie α, von A in E aber die Linie β, und nehme auf AB AF = σ.

3°. Theile DE in G und AF in H in zween gleiche Theile, und beschreibe mit AH und AG ein Rechteck AGIH nach §. 387.

4°. Be=

4°. Beschreibe aus I mit I D einen Kreis, so wird derselbe auch durch E gehen, die grade linie A B in K und L schneiden, und folglich die linien A K, A L bestimmen, welches die beyden gesuchten linien sind.

Diese Zeichnung gründet sich auf §. 164. 165. 262, und wird leicht eingesehen, wenn man nur bedenkt, daß A K + A L = σ und α : A K = A L : β seyn muß.

Anmerkung. Es kann hier öfters geschehen daß mit dreyen gegebenen linien dergleichen hier α, β, σ sind, die Aufgabe nicht aufgelöset werden kann, als welches immer geschiehet, sobald die gegebene Summe σ, in Rücksicht der beyden andern linien α und β zu klein angenommen wird. Ob übrigens die Aufgabe möglich oder unmöglich sey, zeiget allemal die Zeichnung sehr leicht; denn in den Fällen, wo sich, nach dem hier erklärten Verfahren, Durchschnittspunkte auf A B wie K und L finden lassen, ist die Aufgabe allemal möglich, wenn aber der aus I mit I D beschriebene Kreis die grade linie A B nicht einmal berührt, so kann man auch behaupten die Aufgabe ist mit den gegebenen linien unmöglich aufzulösen, und es lassen sich zwischen α und β keine mittlere Glieder einer Verhältnißgleichung finden, deren Summe σ wäre.

Sind übrigens die graden Linien α, β, σ durch Zahlen ausgedrückt, so kann die Aufgabe nur aufgelößt werden, so lange σ mit sich selbsten vervielfältiget, mehr als das vierfache Produkt der Linien α und β beträgt, sobald aber, als σ mit sich selbsten vervielfältiget, weniger als gedachtes vierfache Produkt ausmacht, ist, die Aufgaben aufzulösen, eine Unmöglichkeit.

§. 424.

Zwischen zwoen gegebenen graden Linien eine mittlere verhältnißmäßige grade Linie zu finden. (§. 441. 452) (IV Prop. 13).

Tab. IX. Es seyn a, b fig. 261 die gegebenen graden Linien, zu welcher eine mittlere verhältnißmäßige Linie gesucht wird.

Erste Auflösung. 1°. Ziehe man eine grade Linie AZ von unbestimmter Länge, und trage von A gegen Z, AB $=$ a und AC $=$ b.

2°. Theile BC in D in zween gleiche Theile nach §. 381, und beschreibe mit BD $=$ DC aus D einen Kreis.

3°. Ziehe von A die Berührungslinie AE des Kreises nach §. 393, so ist AE die gesuchte mittlere verhältnißmäßige grade Linie, zwischen den beyden gegebenen a und b.

Der Grund dieses Verfahrens beruhet auf §. 262, und wird, mittelst der daselbst gemachten Anmerkung, leicht eingesehen.

Zwote Auflösung. 1°. Ziehe man eine Tab. IX. grade unbegrenzte Linie AZ fig. 262, und trage, von A gegen Z, AB = a, BC = b.

2°. Theile AC bey D in zween gleiche Theile und beschreibe mit AD = DC, aus D, über AC, einen halben Kreis.

3°. Errichte auf AC in B eine senkrechte Linie BE, nach §. 382, und ziehe dieselbe so weit bis sie den Umkreis des über AC beschriebenen Kreises in E erreicht, so ist BE, die gesuchte mittlere verhältnißmäßige grade Linie zwischen den beyden gegebenen graden Linien a und b.

Diese Zeichnung gründet sich auf §. 263.

Dritte Auflösung. 1°. Trage man auf Tab. IX. eine unbegrenzte grade Linie AZ fig. 263 von A gegen Z, AB = a und AC = b.

2°. Theile AC bey D in zween gleiche Theile, und beschreibe aus D mit AD = DC einen halben Kreis über AC.

3°. Errichte in B nach §. 382 auf AC eine senkrechte Linie BE bis sie die Kreislinie in E erreicht, und ziehe von A nach E die grade Linie AE, so ist AE die gesuchte verhältnißmäßige grade Linie zwischen a und b.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 263.

§. 425.

Mit einem gegebenen Winkel ein gleichgestrecktes Viereck zu beschreiben das einem gegebenen Dreyeck gleich sey. (§. 463) (1 Prop. 42).

Tab. IX. Es sey a fig. 264 der gegebene Winkel, und ABC das gegebene Dreyeck.

1°. Verlängere man die Grundlinie BC des gegebenen Dreyecks ABC, und nehme CD $= \frac{1}{2}$ BC.

2°. Setze bey C an CD einen Winkel FCD, dem gegebenen a gleich, nach §. 385.

3°. Ziehe durch A mit BC die gleichlaufende Linie AF nach §. 386, und bestimme dadurch den Punkt F, und die Seite CF des zu beschreibenden gleichgestreckten Viereckes.

4°. Beschreibe mit CF, CD und den Winkel FCD nach §. 387 das gleichgestreckte Viereck FCDE, so ist dasselbe dem gegebenen Dreyecke ABC völlig gleich, und sein Winkel FCD ist eben so groß als der gegebene a.

Der Grund dieses Verfahrens beruhet auf §. 254.

Anmerkung. Es ist hieraus leicht zu beurtheilen, wie man verfahren müsse, wenn ein gleichgestrecktes Viereck unter einem gegegebenen Winkel einem andern gegebenen gleichgestreckten Vierecke gleich gemacht werden soll. Denn das ganze obige Verfahren bleibt in diesem Falle ungeändert

ändert eben dasselbe, nur mit dem Unterschiede, daß, statt $CD = \frac{1}{2} BC$ zu nehmen $CD = BC$ genommen werden muß, wenn die über BC beschriebene Figur kein Dreyeck sondern ein gleichgestrecktes Viereck ist. Uebrigens ist klar daß der gegebene Winkel a auch ein rechter seyn könne, und so folgt, daß, nach dem beschriebenen Verfahren, ein jedes gegebene Dreyeck, und gleichgestrecktes Viereck in ein Rechteck von gleicher Größe verwandelt werden könne.

§. 426.

Ein gleichgestrecktes Viereck unter einer gegebenen Seite, und einem gegebenen Winkel einem Dreyecke gleich zu machen. (I Prop. 44).

Es sey α fig. 265 die gegebene Seite, β der gegebene Winkel, und ABC das gegebene Dreyeck. β Tab. IX.

1°. Beschreibe man, nach vorigen §., ein gleichgestrecktes Viereck FCDE, gleich dem gegebenen Dreyecke ABC, unter dem gegebenen Winkel β.

2°. Verlängere die Seite FC des beschriebenen gleichgestreckten Viereckes, nehme CH gleich der gegebenen Seite α, und ziehe durch H und D die grade Linie HI bis sie die verlängerte Seite FE in I erreiche.

3°. Ma-

3°. Mache nach §. 384 über HI ein Dreyeck HLI dem Dreyecke HFI gleich, und verlängere die Seiten CD, ED des gleichgestreckten Viereckes FCDE bis sie die Seiten IL, HL des Dreyeckes IHL in K und G schneiden, so ist DGLK das verlangte gleichgestreckte Viereck, in welchem die Winkel GDK, GLK dem gegebenen Winkel β, die Seiten DG, KL aber der gegebenen Seite a gleich sind, und welches überdem eben so groß als das gegebene Dreyeck ABC ist.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 114. 133. 255.

Anmerkung. Auf eben die Art kann mit einer gegebenen Seite, und einem gegebenen Winkel ein gleichgestrecktes Viereck beschrieben werden, welches einem andern gegebenen gleichgestreckten Vierecke gleich sey, wenn nur die Anmerkung des vorigen §. mit in Erwägung gezogen wird. Nimmt man aber für den Winkel β einen rechten Winkel an, so kann auf eben die Art mit einer gegebenen Seite ein Rechteck beschrieben werden, welches einem gegebenen Dreyeck oder gleichgestreckten Vierecke gleich sey.

§. 427.

Ein gleichgestrecktes Viereck unter einem gegebenen Winkel, einer gegebenen

nen geradlinigten Figur gleich zu machen. (I Prop. 45).

Es sey ABCDE fig 266 die gegebene ge= Tab. IX.
radlinigte Figur, a der gegebene Winkel.

1°. Zerfälle man die vorgegebene Figur ABCDE durch die Querlinien BE, CE in die Dreyecke ABE, BCE, CDE.

2°. Beschreibe nach §. 425 unter dem ge=gebenen Winkel a ein gleichgestrecktes Viereck FGHI dem Dreyecke ABE gleich.

3°. Verzeichne nach vorigen §. unter dem gegebenen Winkel a, und der Seite IH ein gleichgestrecktes Viereck IHKL dem Dreyecke BCE gleich, und auf eben die Art unter dem ge=gebenen Winkel a und der Seite LK ein gleich=gestrecktes Viereck LKMN gleich dem Dreyecke CDE, so ist das aus den gleichgestreckten Vier=ecken FH, IK, LM zusammengesetzte gleichge=streckte Viereck FGMN das verlangte.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 51 und §. 120, und wird sehr leicht einge=sehn.

Anmerkung. Auf diese Art kann auch eine jede gegebene geradlinigte Figur in ein Rechteck von eben der Größe verwandelt werden, wenn nur statt den Winkel a ein rechter Winkel genommen wird.

§. 428.

Eine jede gegebene geradlinigte Fi=gur in ein Dreyeck zu verwandeln, dessen

Spitze mit der Spitze eines bestimmten Winkels der vorgegebenen Figur zusammenfalle.

Tab. IX. Erster Fall. Es sey A B C D E F G fig. 267 die gegebene geradlinigte Figur, bey welcher alle Winkel auswärts gehen, und der Punkt des Umkreises, wo die Spitze des zu verzeichnenden Dreyeckes hinfallen soll, sey in einer Ecke A der Figur bestimmt.

1°. Theile man die Figur durch Querlinien, die sämmtlich von A ausgehen, in lauter Dreyecke wie hier in die Dreyecke A B C, A C D, A D E, A E F, A G F.

2°. Ziehe durch B, mit der zunächst an B liegenden Querlinie A C, die gleichlaufende Linie B c, und bemerke auf selbiger den Punkt c, wo die verlängerte Seite C D sie treffen würde.

3°. Durch den gefundenen Punkt c ziehe man mit der folgenden Querlinie A D eine gleichlaufende grade Linie c d, und bemerke den Punkt d wo die nächste Seite D E, wenn sie verlängert würde, die Figur schneiden könnte, und so gehe man weiter, bis man zu einer Seite kömmt, welche mit der Grundlinie des zu zeichnenden Dreyeckes zusammen fallen soll, ist nun wie hier, D E diese Seite, so verlängere man dieselbe bis in d, und ziehe von A nach d die grade Linie A d, so ist der Theil A B C D E, der gegebenen Figur in das Dreyeck A d E verwandelt.

4°. Verwandele auf eben die Art den andern Theil A G F E in das Dreyeck A e E, so

ist

ist die gegebene Figur ABCDEFG in das, aus den beyden Dreyecken AdE, AeE bestehende Dreyeck Ade gehörig verwandelt.

Zweyter Fall. Es sey ABCDEFG Tab. IX. HIKL fig. 268 ein Vieleck, welches sowohl einwärts als auswärtsgehende Winkel habe, und die Spitze des zu zeichnenden Dreyeckes solle in die Spitze des auswärtsgehenden Winkels A treffen.

1°. Ziehe man die Endpunkte der Schenkel eines einwärtsgehenden Winkels, wie hier die Punkte B, D der Schenkel CB, CD des einwärtsgehenden Winkels C, mit einer graden Linie, wie hier mit BD, zusammen, und mit dieser durch die Spitze des einwärtsgehenden Winkels, wie hier durch C, eine gleichlaufende Linie, bis sie eine Seite der gegebenen Figur, welche wie AB einem der beyden Schenkel des einwärtsgehenden Winkels, wie hier BC, anschließt, irgend in einen Punkte, wie b, schneide.

2°. Vereinige den gefundenen Punkt b mit den Punkte D, so ist der Theil des Umkreises ABCD der gegebenen Figur in AbD verwandelt, ohne daß die Figur dadurch im mindesten verändert worden.

3°. Verfahre auf eben die Art, wenn mehrere einwärtsgehende Winkel wie DEF vorhanden sind, und verwandele dadurch den Theil des Umkreises DEFGH in DfGH.

4°. Sollte aber, wie bey dem einwärtsgehenden Winkel K, eine mit I L durch K gezogene gleichlaufende Linie keine Seite, welche an K L oder K I anschließt, begegnen, so ziehe man, von K nach H, eine grade Linie K H, durch I aber mit K H die gleichlaufende Linie I k, bis sie K I in k begegne, und von k nach H die grade Linie k H, so ist dadurch der Theil des Umkreises A L K I H, ohne die Figur zu verändern, in A L k H verwandelt.

5°. Endlich verwandele man den hierdurch gefundenen Umkreis A L k H, nach 1 und 2, in A l H, so ist die gegebene Figur A B C D E F G H I K L in A b D f G H l A verwandelt, welche lauter auswärtsgehende Winkel hat, und daher zum ersten Falle gehört, folglich sich leicht in ein Dreyeck verwandeln läßt.

Tab. IX. Dritter Fall. Es sey A B C D E F G Hl fig. 269 ein Vieleck, welches sowohl ein als auswärtsgehende Winkel habe, und die Spitze des zu beschreibenden Dreyeckes solle in die Spitze eines einwärtsgehenden Winkels fallen.

1°. Verwandele man auf eben die Art wie beym zweyten Fall 1°. 2°. den Theil des Umkreises A I H G F der gegebenen Figur in A l h F, und diesen wiederum wie beym ersten Fall 2°. in A g F, so ist die gegebene Figur schon auf der einen Seite gehörig verwandelt.

2°. Behandele den Theil A B C D E F auf eben die Art wie im ersten Fall bey 2°. ist gezeiget worden, und verändere ihn dadurch in

A c D

AcDEF, diesen aber wiederum wie im zweyten Fall bey 1°. und 2°. ist gezeiget worden, in AdEF, welcher da er lauter auswärtsgehende Winkel hat, sich leicht nach dem ersten Fall weiter verwandeln läßt.

Der Grund dieser Zeichnungen beruhet auf §. 252, und wird völlig eingesehen, wenn man nur bedenkt: daß jedesmal, und in allen Fällen, von der gegebenen Figur, ein Dreyeck ist abgeschnitten oder zur gegebenen Figur zugesetzet worden, gleich drauf aber auf eben die Linie die den Abschnitt oder Zusatz verrichtete, wenn das erste, ein eben so großes Dreyeck beschrieben und dem übrigen Theile der gegebenen Figur hinzugefüget, und wenn das letzte, ein eben so großes Dreyeck von der vermehrten Figur wieder hinweggenommen worden, dadurch, daß man durch die Spitze des weggeschnittenen oder hinzugefügten Dreyeckes, mit der, den Abschnitt oder Zusatz verrichtenden linie eine gleichlaufende zog, und in den Umkreis einen Punkt fand, welcher die Spitze des Dreyeckes bestimmte, das entweder dem übrigen Theile der gegebenen Figur wieder hinzugefüget, oder von der vermehrten Figur wieder weggenommen werden mußte.

Anmerkung. Hieraus sind leicht alle übrige Fälle zu beurtheilen, die noch ausser den dreyen hier erklärten vorkommen können, und man wird sich, so verschieden die in ein Dreyeck zu verwandelnde Figur, von

den Figuren 267. 268. 269 auch immer seyn möchte, leicht aus den dreyen hier vorgetragenen Fällen Raths erholen können. Denn wenn man nur jedesmal, sobald von einer Figur ein Dreyeck ist abgeschnitten worden, wieder ein eben so großes Dreyeck ansetzet, und wenn zu einer Figur ein Dreyeck ist hinzugekommen, wieder ein eben so großes Dreyeck wegnimmt, so ist niemahlen ein Irthum zu befürchten, die Fälle aber, wo von einer gegebenen Figur ein Dreyeck abgeschnitten, oder zu derselben hinzugesetzet werden muß, um eine solche Figur in ein Dreyeck zu verwandeln, ergeben sich immer leicht von selbsten.

§. 429.

Eine jede gegebene geradlinigte Figur in ein Dreyeck zu verwandeln, dessen Spitze in einen bestimmten Punkt einer Seite der gegebenen Figur falle.

Tab.IX Es sey A B C D E F fig. 270 die gegebene Figur, und G der Punkt der Seite F A derselben, wo die Spitze des Dreyeckes hinfallen soll.

1°. Schneide man, mit der linie G E, von der gegebenen Figur, das Dreyeck F G E ab, setze aber sogleich wieder ein eben so großes Dreyeck G E e an, indem man die linie G E als die gemeinschaftliche Grundlinie beyder Dreyecke

GEF,

GEF, GEe betrachtet, so ist die gegebene Figur dadurch in ABCDeG verwandelt.

2°. Setze das Dreyeck DGe der Figur ABCDeG an, schneide aber sogleich wieder das Dreyeck DGd ab, welches mit dem vorigen einerley Grundlinie DG hat, und zwischen den gleichlaufenden Linien DG, ed eingeschlossen ist, so hat man dadurch die gegebene Figur in ABCdG verwandelt, und die Arbeit ist auf der einen Seite der gegebenen Figur verrichtet.

3°. Eben so verfahre man auf der andern Seite, indem man mit GB das Dreyeck GBA abschneide, dagegen aber ein eben so großes Dreyeck GBb wieder ansetzt, davon die Seite bB mit der Seite BC der gegebenen Figur in grader Linie bC liegt, so ist die gegebene Figur dadurch in GbCdG verwandelt worden.

4°. Endlich schneide man von der in GbCdG verwandelten Figur, mit GC, das Dreyeck GCb ab, und setze dagegen das Dreyeck GCc wieder an, so ist die gegebene Figur in das Dreyeck Gdc gehörig verwandelt.

Der Grund dieses Verfahrens ist aus §. 252 klar, und wird aus dem was zu Ende vorigen §. gesagt ist worden, leicht eingesehen, Auch findet hier die Anmerkung des vorigen §. eben so statt.

§. 430.

Eine gegebene geradlinigte Figur in

ein Dreyeck zu verwandeln, dessen Spitze in einen bestimmten Punkt innerhalb der gegebenen Figur falle, und dessen Grundlinie auf eine gegebene Seite derselben zu liegen komme.

Tab. IX. Es sey ABCDEFG fig. 271 die gegebene geradlinigte Figur, H der Punkt innerhalb derselben, wo die Spitze des zu zeichnenden Dreyeckes hinfallen, und DC eine ihrer Seiten, durch welche die Grundlinie laufen soll.

1°. Wenn die gegebene Figur einwärtsgehende Winkel hat wie hier bey F, so verwandele man dieselbe, nach §. 428 zweyten Fall, in eine andere ABCDeG mit lauter auswärtsgehenden Winkeln.

2°. Ziehe von dem innerhalb der Figur gegebenen Punkte H nach dem Punkt A, welcher von derjenigen Seite DC der gegebenen Figur, durch welche die Grundlinie des zu verzeichnenden Dreyeckes gehen soll, am weitesten entfernt ist, die grade linie HA.

3°. Schneide durch HA, HB von der gegebenen Figur das Dreyeck AHB ab, und setze dagegen das dem abgeschnittenen gleiche Dreyeck bHB dadurch wieder an, daß man mit HB durch A eine gleichlaufende linie Ab zieht, und die an HB anliegende Seite CB verlängert, bis sie Ab in b begegegnet, so ist dadurch die gegebene Figur in AHbCDeGA verwandelt.

4°. Eben so schneide man von der verwandelten Figur AHbCDeGA, mit HC, das Dreyeck bHC ab, und setze dagegen, nach dem genugsam erklärten Verfahren, das Dreyeck cHC wieder an, so ist dadurch die gegebene Figur in AHcDeGA verwandelt, und die Arbeit ist für eine Seite der gegebenen Figur vollendet.

5°. Auf eben die Art verfahre man auf der andern Seite der gegebenen Figur, indem man den Theil HAGeDH dadurch in Hge DH verwandelt, diesen aber wieder in das Dreyeck HfD, und endlich dieses Dreyeck in das ihm gleiche Dreyeck HdD, so wird das aus den Dreyecken HdD, HDC, HCc bestehende Dreyeck Hdc das verlangte Dreyeck seyn, dessen Spitze in H fällt, und dessen Grundlinie dc durch die Seite DC der gegebenen Figur läuft.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 252 und wird aus dem was zu Ende des §. 428 gesagt worden, leicht eingesehen. Eben so findet auch hier die §. 428 gemachte Anmerkung statt.

Anmerkung. Bey allen Zeichnungen welche §. 428. 429. 430 erkläret worden sind, ist es nicht nöthig die Linien auszuziehn, welche wir in allen Figuren mit punktirten Linien angedeutet haben, es ist genug, wenn man nur die Punkte bemerket, wo die Spitzen der Dreyecke hinfallen müssen,

welche an die Stelle der weggeschnittenen kommen sollen, und welche Punkte wir in allen Figuren mit kleinen Buchstaben bemerket haben.

§. 431.

Ein gegebenes Rechteck in ein ordentliches Viereck zu verwandeln.

Tab. IX. Es sey ABCD fig. 272 das gegebene Rechteck.

1°. Theile man die längste Seite BC desselben nach §. 381 bey E in zween gleiche Theile BE = EC.

2°. Beschreibe aus E mit BE oder EC den Halbkreis BGC über BC.

3°. Trage die kleinste Seite BA von B gegen C in F, und errichte in F auf BC, nach §. 382, die senkrechte Linie FG, bis sie die Kreislinie in G erreicht.

4°. Ziehe von B nach G die grade Linie BG, so ist diese die Seite eines ordentlichen Viereck, welches nach der bey §. 387 gemachten Anmerkung leicht beschrieben werden kann, und dem gegebenen Rechteck völlig gleich seyn wird.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 190. 260. 263, und wird daraus leicht eingesehen, wenn man sich nur noch, von G nach C, die grade Linie GC gezogen, vorstellt.

Anmerkung. Da zufolge der Anmerkungen der §. 426. 427 ein jedes Dreyeck oder

gleich=

gleichgestrecktes Viereck in ein Rechteck verwandelt werden kann, dieses aber wieder nach der hier erklärten Zeichnung, sich in ein ordentliches Viereck verwandeln läßt, so folgt, daß auch ein jedes gegebenes Dreyeck, oder gleichgestrecktes Viereck in ein ordentliches Viereck verwandelt werden könne. Und da nach §. 427 eine jede gegebene geradlinigte Figur in ein gleichgestrecktes Viereck oder Reckteck, und nach §. 428. 429. 430 eine jede geradlinigte Figur in ein Dreyeck verwandelt werden kann, so lässet sich auch eine jede gegebene geradlinigte Figur endlich in ein ordentliches Viereck verwandeln, welches der gegebenen Figur völlig gleich ist.

§. 432.

Ein jedes gegebenes Dreyeck in ein gleichschenklichtes Dreyeck zu verwandeln.

Es sey A B C fig. 273 das gegebene Dreyeck. Tab. IX.

1°. Halbire man nach §. 381 die Grundlinie B C des gegebenen Dreyeckes bey D, und errichte auf B C in D die senkrechte Linie E D.

2°. Ziehe durch die Spitze A des gegebenen Dreyeckes, mit der Grundlinie B C desselben, eine gleichlaufende Linie A E, bis dieselbe die senkrechte Linie D E in E erreiche.

3°. Von dem hierdurch gefundenen Punkte E ziehe man, nach B und C, die graden Linien EB, EC, so ist das gegebene Dreyeck ABC in das gleichschenklichte EBC gehörig verwandelt.

Der Grund dieser Zeichnnng erhellet klar aus §. 252.

Anmerkung. Da eine jede gegebene geradlinigte Figur nach §. 428. 429. 430 in ein Dreyeck verwandelt werden kann, ein jedes Dreyeck aber sich, nach dem hier erklärten Verfahren, leicht in ein gleichschenklichtes Dreyeck verwandeln läßt, so folgt: daß jede gegebene geradlinigte Figur in ein gleichschenklichtes Dreyeck verwandelt werden könne.

§. 433.

Ein gegebenes gleichschenklichtes Dreyeck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Tab.IX. Es sey ABC fig. 274 das gegebene gleichschenklichte Dreyeck, welches in ein gleichseitiges verwandelt werden soll.

1°. Beschreibe man über die Grundlinie BC des gegebenen Dreyeckes ein gleichseitiges Dreyeck BEC, und ziehe durch die Spitzen E und A beyder Dreyecke eine grade Linie ED, bis auf die Grundlinie BC.

2°. Be-

2°. Beschreibe über ED den Halbkreis EFD, und errichte in A auf ED eine senkrechte linie AF bis sie den über ED beschriebenen Halbkreis in F erreiche.

3°. Beschreibe aus D mit DF einen Kreisbogen FG, und bestimme dadurch auf ED den Punkt G.

4°. Ziehe durch G mit EB und EC die gleichlaufenden linien GH, GI, so ist das gleichseitige Dreyeck GHI das verlangte Dreyeck, und dem gegebenen völlig gleich.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 259, und wird daraus völlig eingesehen, wenn man nur bemerkt, daß nach der Zeichnung DG = DF und DA : DG = DG : DE ist; wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke EBC, GHI aber, ist auch, HI : BC = DA : DE, und aus beyden Verhältnißgleichungen folgt DA : DG = HI : BC.

Anmerkung. Da nach vorigen §. eine jede gegebene geradlinigte Figur in ein gleichschenklichtes Dreyeck, dieses aber nach dem hier erklärten Verfahren wieder in ein gleichseitiges Dreyeck verwandelt werden kann, so ist es möglich eine jede gegebene geradlinigte Figur in ein gleichseitiges Dreyeck zu verwandeln. Uebrigens ist zu merken, daß in den Fällen, wo AD größer als DE gefunden wird, der Halbkreis über AD beschrieben, und die senkrechte linie auf ED, bis an den Umkreis, nicht

aus

aus A, sondern aus E gezogen werden müssen.

§. 434.

Eine gegebene geradlinigte Figur in eine andere zu verwandlen, welche einer zwoten gegebenen geradlinigten Figur ähnlich sey.

Tab.IX. Es sey A B C D E fig. 275 die zu verwandelnde Figur und a b c d e f fig. 276 diejenige, welcher sie ähnlich werden soll.

1°. Verwandele man zufolge der Anmerkung des §. 230 beyde gegebene Figuren in ordentliche Vierecke G H I K, g h i k fig. 277. 278 davon das erste der Figur A B C D E, das andere aber der Figur a b c d e f gleich ist, oder suche bloß die Seiten H I, h i dieser ordentlichen Vierecke.

2°. Ziehe aus einer beliebigen Ecke, wie e, unter einem beliebigen Winkel, eine grade Linie e α, eben so groß als die Seite h i desjenigen ordentlichen Vierecks, welches der Figur a b c d e f gleich ist, und vereinige die Punkte α, d mit der graden Linie α d.

3°. Nehme auf e α, von e aus, die Linie e β gleich der Seite H I des ordentlichen Vierecks G H I K fig. 277, und ziehe durch β mit α d eine gleichlaufende Linie β d', und bestimme dadurch in e d den Punkt d'.

4°. Beschreibe über e d', nach §. 420 zwote Auflösung, die Figur e d' c' b' a' f', so ist dieselbe der Figur A B C D E fig. 275 gleich, und

der

der Figur a b c d e f fig. 276 ähnlich, folglich geschehen, was verlangt worden.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 276, und wird leicht eingesehen.

Anmerkung. Statt die beyden gegebenen Figuren A B C D E fig. 275 und a b c d e f fig. 276, wie hier geschehn, in ordentliche Vierecke zu verwandeln, könnte man dieselben auch in gleichseitige Dreyecke nach vorigen §. verwandelt haben, um mit diesen eben so wie mit jenen zu verfahren. Uebrigens ist klar daß hierdurch auch jede gegebene Figur in eine ordentliche Figur von einer bestimmten Anzahl Seiten verwandelt werden könne, folglich kann auch ein jedes Dreyeck in jede ordentliche oder unordentliche Figur von gleicher Größe verwandelt werden, und es lassen sich daher alle, §. 428. 429. 430 vorgetragene Fragen, auch umgekehrt beantworten.

§. 435.

Ein ordentliches Viereck zu finden, welches mehrern gegebenen ordentlichen Vierecken zusammengenommen gleich sey. (§. 484).

Es seyn A, B, C fig. 279 die gegebenen ordentlichen Vierecke. Tab. IX.

1°. Setze man die Seiten der ordentlichen Vierecke A, B unter einen rechten Winkel c a b an-

aneinander, und ziehe die schiefe Seite cb dieses Dreyeckes.

2°. Errichte in c auf cb eine senkrechte Linie cd, so groß, als die Seite des dritten gegebenen ordentlichen Viereckes C, und ziehe die Punkte d, b mit einer graden Linie db zusammen, und eben so verfahre man weiter, wenn mehrere ordentliche Vierecke gegeben sind, so ist die zuletzt gefundene grade Linie, wie hier db die Seite des gesuchten ordentlichen Viereckes.

Diese Zeichnung gründet sich auf §. 273, und wird ohne Mühe eingesehen.

Anmerkung. Da jede gegebene geradlinigte Figur nach §. 431 leicht in ein ordentliches Viereck verwandelt werden kann, so lässet sich immer ein ordentliches Viereck angeben, welches mehreren gegebenen geradlinigten Figuren gleich ist; und da dieses nach §. 434 wieder in eine Figur verwandelt werden kann, welche jeder gegebenen ähnlich ist, so läßt sich auch jederzeit eine Figur von bestimmter Gattung oder Gestalt finden, welche mehrern verschiedenen Figuren zusammengenommen gleich ist.

§. 436.

Ein ordentliches Viereck zu finden, welches dem Unterschiede zwoer gegebenen ordentlichen Vierecken gleich sey. (§. 485).

Es seyn a, b fig. 280 die gegebenen or- Tab. IX.
dentlichen Vierecke, davon der Unterschied ge-
funden werden soll.

1°. Ziehe man eine grade Linie AB, eben so groß, als die Seite des grössern der gegebenen beyden ordentlichen Vierecke, und halbire AB in C nach §. 381.

2°. Beschreibe aus C mit AC = CB ei-
nen Halbkreis ADB über AB, setze aus A in D die Seite des kleinen der beyden ordentlichen Vierecke, und ziehe von den hierdurch gefun-
denen Punkt D, nach B die grade Linie DB, so ist DB die Seite des gesuchten ordentlichen Vierecks, welches nach §. 387 beschrieben wer-
den kann, und dem Unterscheide der gegebenen ordentlichen Vierecke a, b gleich seyn wird.

Der Grund dieses Verfahrens beruht wieder auf §. 273, und wird sehr leicht einge-
sehn.

Anmerkung. Die Anmerkung des vorigen §. gilt auch hier, und es läßt sich immer eine Figur von bestimmter Gestalt zeich-
nen, welche dem Unterschiede zwoer an-
dern Figuren von verschiedener Gestalt und Größe gleich ist, mit welchen sie aber übrigens keine Aehnlichkeit habe.

§. 437.

Eine Figur zu zeichnen, welche zwoen oder mehreren gegebenen ähnli-

chen Figuren ähnlich, und beyden oder allen zusammengenommen gleich sey. (§. 493).

Tab. IX. Es seyn A B C D E, a b c d e zwo gegebene ähnliche Figuren.

1°. Nehme man zwo ähnlichliegende Seiten der beyden ähnlichen Figuren als D C, d c, und setze dieselbe wie bey §. 435 unter einem rechten Winkel $\alpha\beta\gamma$ dadurch zusammen, daß man $\beta\gamma = DC$ und $\alpha\beta = dc$ macht.

2°. Ziehe die Punkte α, γ mit einer graden linie $\alpha\gamma$ zusammen, und verfahre so weiter, wenn mehr als zwo ähnliche Figuren gegeben sind.

3°. Beschreibe über die zuletzt gefundene linie nach §. 420 eine Figur, den gegebenen Figuren völlig ähnlich, so wird dieselbe den gegebenen Figuren zusammengenommen auch gleich seyn.

Der Grund dieser Zeichnung ist nach §. 280 klar.

Anmerkung. Hieraus erhellet, wie eine Figur beschrieben werden könne, welche zwoen gegebenen ähnlichen Figuren ähnlich, und dem Unterschiede der beyden gegebenen gleich sey. Setzet man aber auf eben die Art die Durchmesser mehrerer Kreisflächen unter rechten Winkeln aneinander, so läßt sich eine Kreisfläche finden, welche mehreren gegebenen Kreisflächen zusammengenommen gleich ist. Und

wenn

wenn man mit den Durchmessern zwoer Kreisflächen eben so verfährt, wie §. 436 mit den Seiten der gegebenen ordentlichen Vierecken, so ergiebt sich der Durchmesser einer Kreisflache, welche dem Unterschiede zwoer gegebenen Kreisflächen völlig gleich ist. Werden endlich die Durchmesser der Kreise in oder um welche ordentliche und ähnliche Vielecke beschrieben sind, auf eben die Art behandelt, so läßt sich der Durchmesser eines Kreises finden, in oder um welchen ein, den gegebenen ordentlichen Vielecken ähnliches Vieleck beschrieben werden kann, welches entweder den gegebenen ordentlichen Figuren zusammengenommen gleich ist, oder den Unterschied zwoer gegebenen ordentlichen Figuren bestimmt. Das aber was hier von den Durchmessern der Kreise gesagt ist worden, kann eben so von ihren Halbmessern verstanden werden.

§. 438.

Eine gegebene ordentliche Figur, in eine andere ordentliche Figur von mehr oder weniger Seiten zu verwandeln.

Es sey das ordentliche Fünfeck ABCDE Tab. X. fig. 283 in ein ordentliches Siebeneck zu verwandeln.

1°. Beschreibe man, zufolge Anmerkung §. 414 ein ordentliches Siebeneck GHIKLMN fig. 284 von willkührlicher Größe.

2°. Verwandele eines der gleichschenklichten Dreyecke der gegebenen ordentlichen Figur, wie hier das Dreyeck F D C nach §. 433 in ein gleichseitiges Dreyeck $\alpha\beta\gamma$ fig. 285, oder suche bloß die Seite $\beta\gamma$ dieses Dreyeckes.

3°. Eben so suche man die Seite eines gleichseitigen Dreyeckes, welches einem der gleichschenklichten Dreyecke des nach 1°. beschriebenen Siebeneckes gleich ist, und trage die gefundene Seite von O gegen L bis in δ.

4°. Beschreibe über $\beta\gamma$ den Halbkreis $\beta\theta\gamma$, theile $\beta\gamma$ in so viele gleiche Theile als die neue Figur Seiten haben soll, folglich hier in sieben gleiche Theile, nnd behalte davon so viele Theile, als die gegebene Figur Seiten hat, folglich hier 5 Theile für $\beta\zeta$.

5°. Errichte auf $\beta\gamma$ in ζ eine senkrechte Linie $\theta\zeta$, welche den Umkreis des über $\beta\gamma$ beschriebenen Halbkreises in θ schneide, und ziehe die grade Linie $\beta\theta$.

6°. Trage die gefundene Linie $\beta\theta$ von O gegen L bis in η, und nachdem die Punkte δ, K, mit der graden Linie δ K sind vereiniget worden, so ziehe man, durch η, mit δK, die gleichlaufende Linie ηk, bis sie OK in k erreiche, so ist der hierdurch gefundene Punkt k eine Ecke der gesuchten Figur; welche nun dadurch am leichtesten beschrieben werden kann, daß man aus O nach jeder Ecke des willkührlich beschriebenen ordentlichen Siebenecks grade Linien zieht, auf dieselbe die grade Linie Ok aus O in l, m, n, g,

n, g, h, i trägt, und die gefundenen Punkte mit graden linien kl, lm, mn, ng, gh, hi, ik zusammenzieht. Denn die hierdurch gefundene Figur ghiklmn ist der gegebenen Figur ABCDE völlig gleich.

Der Grund dieser Zeichnung ist folgender. Erstlich ist

ABCDE. GHIKLMN = 5FDC : 7OLK.

Ferner wird nach §. 275, da βγ die Seite eines gleichseitigen Dreyeckes ist, welches dem Dreyecke FDC gleich gemacht worden, und Oδ die Seite eines andern gleichseitigen Dreyeckes, so dem Dreyecke OLK gleich ist, vorstellt

FDC : OLK = $(\beta\gamma)^2 : (O\delta)^2$, und hieraus folgt

5FDC : 7OLK = $\frac{5}{7}(\beta\gamma)^2 : (O\delta)^2$.

Es ist aber nach §. 263.

$\beta\zeta : \beta\theta = \beta\theta : \beta\gamma$

folglich da $\beta\zeta = \frac{5}{7}\beta\gamma$ und $\beta\theta = O\eta$, so folgt $\frac{5}{7}(\beta\gamma)^2 = (O\eta)^2$, folglich

5FDC : 7OLK = $(O\eta)^2 : (O\delta)^2$ = $(Ok)^2 : (OK)^2$ nach §. 227. 237, und hieraus wird ferner

ABCDE : GHIKLMN = $(Ok)^2 : (OK)^2$.

Nach §. 281 aber ist auch

GHIKLMN : ghiklmn = $(OK)^2 : (Ok)^2$

wird diese letzte Verhältnißgleichung mit der vorigen zusammengesetzt, so ergiebt sich nach §. 224.

ABCDE : ghiklmn = 1 : 1, folglich ABCDE = ghiklmn, wie erfordert wird.

Anmerkung. Sollte die gegebene Figur in eine andere Figur von weniger Seiten verwandelt werden, so muß die Seite des gleichseitigen Dreyeckes, welches einem der gleichschenklichten Dreyecke der willkührlich gezeichneten Figur gleich ist, in eben so viele gleiche Theile zerfällt werden, als die gegebene Figur Seiten hat, und von diesen Theilen müssen so viele behalten werden, als die neue Figur Seiten erhalten soll. Uebrigens bleibt alles eben so, wie es hier ist gezeiget worden. Endlich ist klar, daß der hier geführte Beweis allgemein sey, und nicht von einer bestimmten Zahl der Seiten abhange.

§. 439.

Auf die Grundlinie eines gegebenen Dreyeckes, ein, dem Dreyecke gleiches Viereck, so zu setzen, daß die eine Seite desselben mit der Grundlinie gleichlaufe, und darinnen der eine Winkel an der Grundlinie ein Winkel des Dreyeckes, der andere aber einem gegebenen Winkel gleich sey.

Tab. X. Es sey ABC fig. 286 das gegebene Dreyeck, welches in ein Viereck verwandelt werden soll, darinnen eine Seite mit der Grundlinie BC des gegebenen Dreyeckes gleichlaufe, der Win-

Winkel A B C unverändert bleibe, und der andere Winkel bey C dem gegebenen a gleich werde.

1°. Setze man bey C an B C den gegebenen Winkel a, nach §. 385 gehörig an, indem man C D ziehet.

2°. Ziehe durch die Spitze A des gegebenen Dreyeckes mit B C eine gleichlaufende Linie A D bis an C D, durch B aber mit C D eine gleichlaufende Linie B E bis an A D.

3°. Beschreibe über A D den Halbkreis A F D, und errichte auf A D in E die senkrechte Linie E F, bis an den Umkreis des über A D beschriebenen Halbkreises.

4°. Beschreibe aus D mit D F den Kreisbogen F G bis an A D, ziehe durch G mit D C die gleichlaufende Linie G H bis an A B, und endlich durch H mit B C die gleichlaufende Linie H I bis an C D, so ist das Viereck H B C I das verlangte, und dem gegebenen Dreyecke A B C völlig gleich.

Der Grund dieses Verfahrens beruhet auf folgendem.

Nach der Zeichnung ist, zufolge §. 263, weil nach §. 133 H I = G D und B C = E D,

A D : H I = H I : B C

und hieraus nach §. 215. 1°.

A G : G E = H I : B C

und hieraus ferner nach §. 214. 4°.

A E : G E = H I + B C : B C.

Da aber nach §. 237. 1°. auch ist

AE : GE = AB : HB

so wird

a) HI + BC : BC = AB : HB.

Man ziehe HC, so wird nach §. 252.

HBC : CHI = BC : HI

folglich nach §. 214. 4°.

HBCI : HBC = HI + BC : BC

welches mit a) verglichen giebt

HBCI : HBC = AB : HB.

Es ist aber auch nach §. 278.

HBC : ABC = HB : AB

welches mit der vorigen Verhältnißgleichung verbunden, nach §. 224 giebt

HBCI : ABC = 1 : 1, folglich HBCI = ABC, wie erfordert wird.

Anmerkung. In Fällen wo AD kleiner als BC gefunden wird, bleibt bey der Zeichnung alles, wie in fig. 286, auſſer daß der Halbkreis nicht über AD, sondern über BC beschrieben werden muß.

§. 440.

Ein gegebenes Dreyeck aus einer bestimmten Spitze in gleiche Theile oder nach einem gegebenen Verhältniß einzutheilen.

Tab. X. **Erster Fall.** Es sey das Dreyeck ABC fig. 287 in fünf gleiche Theile, aus der Spitze A, zu zerfällen.

1°. Thei=

1°. Theile man die, der Spitze A gegenüberliegende Seite, nach §. 415 in fünf gleiche Theile bey D, E, F, G.

2°. Ziehe von A nach diesen Theilungspunkten die graden Linien AD, AE, AF, AG, so entstehen die Dreyecke ABD, ADE, AEF, AFG, AGC, worinnen das gegebene Dreyeck ABC zerfället wird, und davon jegliches der fünfte Theil des Ganzen ist.

Der Grund dieses Verfahreus beruhet auf §. 252.

Zwoter Fall. Es sey das Dreyeck abc Tab. X. fig. 288 aus der Spitze a dergestalt in vier Theile zu zerfällen, daß der eine Theil gleich der Helfte, der andere Theil gleich dem vierten Theil, der dritte Theil gleich dem siebenten Theil, und endlich der vierte und letzte Theil gleich dem Ueberreste des Ganzen werde.

1°. Da der gemeinschaftiche Nenner der gegebenen Brüche $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{7}$ die Zahl 28 ist, folglich die Brüche durch $\frac{14}{28}$, $\frac{7}{28}$, $\frac{4}{28}$ vorgestellet werden können, so theile man die, der Spitze a gegenüberliegende Seite, nach §. 415 in 28 gleiche Theile, und nehme von diesen 28 gleichen Theilen 14, von b nach d, 7 von d nach e, und 4 von e nach f.

2°. Ziehe nach den gefundenen Punkten d, e, f von der Spitze a grade linie ad, ae, af, so werden dieselbe das gegebene Dreyeck abc, so zerfällen, daß abc : abd = 28 : 14 = 2 : 1; abc : ade = 28 : 7 = 4 : 1; abc : aef =

28 : 4 = 7 : 1, und abc : afc = 28 : 3 wie verlangt worden.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 256.

Anmerkung. Zuweilen sagt man: eine gegebene Figur solle in die Helfte, in zwey Drittheile, in drey Viertheile, und in ein Fünftheil zerfället werden. Da nun der gemeinschaftliche Nenner dieser Brüche 60 ist, so lassen sich dieselbe durch $\frac{30}{60}$ $\frac{40}{60}$ $\frac{45}{60}$ $\frac{12}{60}$ vorstellen, deren Summe $\frac{127}{60} = 2\frac{7}{60}$ ist. In diesem Fall verstehet man nicht: die Figur solle in $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$ getheilet werden, welches auch nicht möglich ist, da die Theile zusammengenommen größer als die doppelte gegebene Figur seyn würden, sondern der wahre Sinn ist bloß: die gegebene Figur solle, nach den Verhältnissen $\frac{127}{60} : \frac{1}{2} = 127 : 30$; $\frac{127}{60} : \frac{2}{3} = 127 : 40$; $\frac{127}{60} : \frac{3}{4} = 127 : 45$, und endlich $\frac{127}{60} : \frac{1}{5} = 127 : 12$, eingetheilet werden. Um dieses aber zu erhalten, darf nur die Seite des Dreyeckes, welche derjenigen Spitze desselben gegenüberliegt, aus welcher die Eintheilung geschehen soll, in 127 gleiche Theile zerfällt werden, um von diesen gleichen Theilen 30, 40, 45, 12 für die Grundlinien der Dreyecke zu neh-

nehmen, worinnen das gegebene eingetheilet werden soll.

§. 441.

Ein gegebenes Dreyeck, aus einem bestimmten Punkte einer seiner Seiten, in gleiche Theile einzutheilen.

Es sey ABC fig. 289 das gegebene Drey- Tab. X.
eck, welches aus dem Punkte H der Seite BC in fünf gleiche Theile zerfället werden soll.

1°. Theile man nach vorigen §. das gegebene Dreyeck, aus der Spitze A, welche der Seite BC, worinnen der Punkt H bestimmt ist worden, gegenüberliegt, in fünf gleiche Theile ABD, ADE, AEF, AFG, AGC.

2°. Ziehe von der Spitze A nach dem Punkte H aus welchem die Theilung geschehen soll die grade linie AH, durch die Punkte D, E, F, G aber, mit AH, die gleichlaufenden linien Dd, Ee, Ff, Gg bis an AB und AC, und bestimme dadurch die Punkte d, e, f, g.

3°. Ziehe von H nach d, e, f, g die Theilungslinien Hd, He, Hf, Hg, so wird dadurch das gegebene Dreyeck ABC, in die fünf gleiche Theile BdH, AdHe, eHf, fHg und gHC aus H, wie verlangt worden, eingetheilet.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 252, und wird leicht eingesehen.

Anmerkung. Sollte das gegebene Dreyeck nach einem gewissen Verhältniß zerfället werden, so bleibt alles übrige, ausser daß das gegebene Dreyeck nicht aus der Spitze in gleiche Theile, sondern nach dem bestimmten Verhältniß, zufolge vorigem §. zwoten Fall eingetheilet werden muß. Uebrigens ist nicht nöthig die Theilungslinien AD, AE, AF, AG zu ziehen, indem es genug ist, die Punkte D, E, F, G, zu haben, durch welche mit AH die gleichlaufenden Linien gezogen werden müssen, welche man auch zu ziehen ersparen kann, wenn man nur auf AB und AC die Punkte d, e, f, g bemerkt, wo diese, von den mit AH gleichlaufenden Linien Dd, Ee, Ff, Gg getroffen werden. Wir haben daher alle die Linien welche man zu ziehen ersparen kann, in fig. 289 bloß punktirt.

§. 442.

Ein gegebenes Dreyeck in gleiche Theile dergestalt zu theilen, daß die Theilungslinien mit einer bestimmten Seite desselben gleichlaufen.

Tab. X. Es sey das Dreyeck ABC fig. 290 gegeben, welches in sieben gleiche Theile dergestalt zertheilet werden soll, daß die Theilungslinien mit der Seite AC gleichlaufen.

1°. Beschreibe man, über oder unter eine der beyden andern Seiten, wie hier über AB geschehen, einen Halbkreis AJEFGHIB, und theile die Seite AB in eben so viele gleiche Theile, als das gegebene Dreyeck ABC selbst erhalten soll, demnach hier in sieben, und 1. 2. 3. 4. 5. 6 seyn die Theilungspunkte.

2°. Errichte in diesen gefundenen Theilungspunkten die senkrechten linien 6D, 5E, 4F, 3G, 2H, 1I, auf AB, bis an den Umkreis des über AB beschriebenen Halbkreises, und bestimme dadurch die Punkte D, E, F, G, H, I.

3°. Beschreibe aus derjenigen Spitze, welche der Seite gegenüberliegt, mit welcher die Theilungslinien gleichlaufen sollen, demnach hier aus B mit den Entfernungen BD, BE, BF, BG, BH, BI die Kreisbögen Dd, Ee, Ff, Gg, Hh, Ii bis an AB, und bestimme dadurch auf AB die Punkte d, e, f, g, h, i.

4°. Ziehe durch die gefundenen Punkte d, e, f, g, h, i mit AC die gleichlaufenden linien dk, el, fm, gn, ho, ip, so wird dadurch das gegebene Dreyeck ABC in die sieben gleiche Theile AdkC, delk, efml, fgnm, ghon, hipo, iBp gehörig eingetheilet.

Der Grund dieses Verfahrens ist folgender.

Stellet man sich von B nach I, H, G, F, E, D grade linien vor, so sind diese den linien Bi, Bh, Bg, Bf, Be, Bd völlig gleich, hier-

hieraus aber folgt nach §. 263, wenn man sich nur noch, von A nach D, E, F, G, H, I, grade Linien gezogen, vorstellt, und den §. 190 mit zuzieht.

$Bi^2 = AB . B1$, $Bh^2 = AB . B2$, $Bg^2 = AB . B3$, $Bf^2 = AB . B4$, $Be^2 = AB . B5$, $Bd^2 = AB . B6$.

Da aber $B1 = \frac{1}{7} AB$, $B2 = \frac{2}{7} AB$, $B3 = \frac{3}{7} AB$, $B4 = \frac{4}{7} AB$, $B5 = \frac{5}{7} AB$, $B6 = \frac{6}{7} AB$ sind gemacht worden, so folgt

$Bi^2 = \frac{1}{7} AB^2$, $Bh^2 = \frac{2}{7} AB^2$, $Bg^2 = \frac{3}{7} AB^2$, $Bf^2 = \frac{4}{7} AB^2$, $Be^2 = \frac{5}{7} AB^2$, und $Bd^2 = \frac{6}{7} AB^2$.

Nun sind aber, nach §. 244 die Dreyecke Bip, Bho, Bgn, Bfm, Bel, Bdk dem Dreyecke ABC ähnlich, folglich wird nach §. 275.

$Bip : BAC = Bi^2 : AB^2 = \frac{1}{7} AB^2 : AB^2$
$Bho : BAC = Bh^2 : AB^2 = \frac{2}{7} AB^2 : AB^2$
$Bgn : BAC = Bg^2 : AB^2 = \frac{3}{7} AB^2 : AB^2$
$Bfm : BAC = Bf^2 : AB^2 = \frac{4}{7} AB^2 : AB^2$
$Bel : BAC = Be^2 : AB^2 = \frac{5}{7} AB^2 : AB^2$
$Bdk : BAC = Bd^2 : AB^2 = \frac{6}{7} AB^2 : AB^2$
$BAC : BAC = AB^2 : AB^2 = \frac{7}{7} AB^2 : AB^2$

woraus nach §. 217 geschlossen werden kann, wenn man hier nur zufolge §. 212 die mittlern Glieder verwechselt.

$Bip : \frac{1}{7} AB^2 = BAC : AB^2$
$Bho - Bip : \frac{1}{7} AB^2 = BAC : AB^2$
$Bgn - Bho : \frac{1}{7} AB^2 = BAC : AB^2$
$Bfm - Bgn : \frac{1}{7} AB^2 = BAC : AB^2$

$Bel - Bfm : \frac{1}{7} AB^2 = BAC : AB^2$
$Bdk - Bel : \frac{1}{7} AB^2 = BAC : AB^2$
$BAC - Bdk : \frac{1}{7} AB^2 = BAC : AB^2$.

Da nun in diesen Verhältnißgleichungen die drey letzten Glieder gleich sind, so kann geschlossen werden

$Bip = Bho - Bip = Bgn - Bho = Bfm - Bgn = Bel - Bfm = Bdk - Bel = BAC - Bdk$

oder welches gleich ist

$Bip = hipo = ghon = fgnm = ef ml = delk = AdkC$, welches zu erweisen war.

Anmerkung. Sollte das gegebene Dreyeck nicht wie hier in gleiche Theile, sondern nach einem bestimmten Verhältnisse eingetheilet werden, so bleibt alles übrige wie hier ist gezeiget worden, nur daß in diesem Falle die Seite AB nicht in gleiche Theile, sondern nach dem gegebenen Verhältniß eingetheilet werden muß, davon der Grund aus obigen leicht eingesehen werden kann. Uebrigens erhellet von selbsten, daß der hier geführte Beweis nicht von einer bestimmten Anzahl der Theile abhängt, sondern vielmehr sich auf jede beliebige Anzahl Theilungen eben so anwenden läßt. Endlich so kann man auch das Ziehen der hier punktirten Linien vermeiden, wenn man bloß die Punkte D, E, F, G, H, I, und

mittelst

mittelst derselben auf AB die Punkte d, e, f, g, h, i bestimmt.

§. 443.

Ein gegebenes Dreyeck in gleiche Theile dergestalt zu theilen, daß die Theilungslinien auf einer bestimmten Seite des Dreyeckes senkrecht stehen.

Tab. X. Es ABC fig. 291 das gegebene Dreyeck, welches in sechs gleiche Theile dergestalt getheilet werden soll, daß die Theilungslinien auf AB senkrecht stehen.

1°. Ziehe man, von der Spitzes des gegebenen Dreyeckes, welche derjenigen Seite, auf welche die Theilungslinien senkrecht stehen sollen, gegenüberliegt, wie hier von C, auf diese bestimmte Seite, folglich hier auf AB, eine senkrechte Linie, wie CD.

2°. Beschreibe, über oder unter die Theile AD, DB der Seite AB, wie hier über AD, und DB geschehen, die Halbkreise AEFD, DGHIB.

3°. Theile die Seite AB in eben so viele gleiche Theile, als das gegebene Dreyeck ABC erhalten soll, demnach hier in sechs gleiche Theile bey 1 . 2 . 3 . 4 . 5, errichte in diesen Theilungspunkten, auf AB, senkrechte Linien, bis an die über AD, DB beschriebene Halbkreise, und bestimme dadurch die Punkte E, F, G, H, I.

4°. Be-

4°. Beschreibe aus A mit AE, AF die Kreisbögen Ee, Ff, aus B aber, mit BG, BH, BI die Kreisbogen Gg, Hh, Ii bis an AB, und bestimme dadurch die Punkte e, f, g, h, i.

4°. Ziehe durch die gefundene Punkte e, f, g, h, i mit DC die gleichlaufenden linien ek, fl, gm, hn, io, so wird dadurch das gegebene Dreyeck ABC in die sechs gleichen Theile Aek, kefl, lfgm, mghn, nhio, und oiB eingetheilet.

Der Grund dieser Zeichnung ist folgender.

Nach §. 256 ist

$$ACD : ACB = AD : AB.$$
$$CDB : ACB = DB : AB.$$

Nach §. 263 ist aber auch

$Ae^2 = AD . A1$, $Af^2 = AD . A2$, $Bg^2 = DB . B3$, $Bh^2 = DB . B4$, $Bi^2 = DB . B5$.

oder da $A1 = \frac{1}{6} AB$, $A2 = \frac{2}{6} AB$, $B3 = \frac{3}{6} AB$, $B4 = \frac{2}{6} AB$, $B5 = \frac{1}{6} AB$, so ist

$Ae^2 = \frac{1}{6} AD . AB$, $Af^2 = \frac{2}{6} AD . AB$, $Bg^2 = \frac{3}{6} DB . AB$, $Bh^2 = \frac{2}{6} DB . AB$ und $Bi^2 = \frac{1}{6} DB . AB$.

Nun sind aber nach §. 244 die Dreyecke Ake, Alf dem Dreyecke ACD ähnlich, und eben so sind die Dreyecke Boi, Bnh, Bmg dem Dreyecke BCD ähnlich, folglich wird nach §. 275.

$$Ake : ACD = Ae^2 : AD^2 = \frac{1}{6} AB : AD$$
$$Alf : ACD = Af^2 : AD^2 = \frac{2}{6} AB : AD$$

$Bmg:CDB = Bg^2:DB^2 = \frac{3}{6}AB:DB$
$Bnh:CDB = Bh^2:DB^2 = \frac{2}{6}AB:DB$
$Boi:CDB = Bi^2:DB^2 = \frac{1}{6}AB:DB.$

Setzt man nun mit den ersten beyden Verhältnißgleichungen die Verhältnißgleichung.

$$ACD:ACB = AD:AB$$

mit den drey letzten aber, die andere

$$CDB:ACB = DB:AB$$

zusammen, so wird

$Ake:ACB = \frac{1}{6}AB:AB$
$Alf:ACB = \frac{2}{6}AB:AB$
$ACD:ACB = AD:AB$
$CDB:ACB = DB:AB$
$Bmg:ACB = \frac{3}{6}AB:AB$
$Bnh:ACB = \frac{2}{6}AB:AB$
$Boi:ACB = \frac{1}{6}AB:AB.$

Nach §. 217 findet sich aber

1) $Ake:ACB = \frac{1}{6}AB:AB$
2) $Alf - Ake:ACB = \frac{1}{6}AB:AB$
3) $ACD - Alf:ACB = fD:AB$
4) $CDB - Bmg:ACB = Dg:AB$
5) $Bmg - Bnh:ACB = \frac{1}{6}AB:AB$
6) $Bnh - Boi:ACB = \frac{1}{6}AB:AB$
7) $Boi:ACB = \frac{1}{6}AB:AB.$

Woraus ferner folget, nachdem aus 3 und 4, zusammengenommen geschlossen ist worden

$lCDf + CDgm:ACB = \frac{1}{6}AB:AB$

daß Ake, kefl, lfgm, mghn, nhio, und oiB unter einander gleich seyn müssen.

Anmerkung. Die Anmerkung des vorigen §. findet auch hier ihre Anwendung, denn

es

es erhellet genugsam aus dem Beweise, daß diese Zeichnung eben so wenig an einer bestimmten Anzahl der Theile, als an der Gleichheit derselben gebunden sey.

§. 444.

Ein gleichgestrecktes Viereck in zween gleiche Theile dergestalt zu zerfällen, daß die Theilungslinie durch einen innerhalb desselben bestimmten Punkte gehe.

Es sey ABCD fig. 292 das gegebene Tab. X. gleichgestreckte Viereck, und E der Punkt innerhalb desselben, durch welchen die Theilungslinie gehen soll.

1°. Ziehe man die Querlinie BD, und theile dieselbe bey F in zween gleiche Theile BF = FD.

2°. lege eine grade linie GH durch die Punkte F, E, so theilet dieselbe das gegebene gleichgestreckte Viereck in die beyden, einander gleiche Vierecke AGHB, GHCD.

Der Grund dieses Verfahrens beruhet auf §. 136 und 141, woraus leicht eingesehen wird, daß GFD = BFH, und ABD = BCD sey, folglich auch ABFG = DFHC, und endlich ABHG = GHCD seyn müssen.

Anmerkung. Sollte die Theilung aus einem Punkte im Umkreise, wie G, geschehen, so darf nur der Theil AG der Seite AD auf die gegenüberliegende Seite BC, aus C

in H getragen, und durch G und H die Theilungslinie G H gezogen werden. Eben dieses wird erhalten, wenn BH gleich an GD genommen wird.

§. 445.

Ein gegebenes Viereck, das zwo gegenüberliegende gleichlaufende Seiten hat, in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile so einzutheilen, daß die Theilungslinien mit den gleichlaufenden Seiten auch gleichlaufen.

Tab.X Es sey das Viereck A B C D fig. 293, bey welchem die zwo gegenüberliegende Seiten A D, B C gleichlaufen, in fünf gleiche Theile zu zerfällen.

1°. Ziehe man durch B mit C D die gleichlaufende Linie B E, und beschreibe über A D und E D die Halbkreise A F G H I D und D f g h i E.

2°. Theile die Durchmesser A D, D F der beschriebenen Halbkreise in eben so viele gleiche Theile, als das Viereck erhalten soll, demnach hier in fünf gleiche Theile, und zwar den ersten aus A in 1 . 2 . 3 . 4. den andern aber aus D in 1 . 2 . 3 . 4, wo in der Figur die letzten Ziffern unter A D geschrieben worden.

3°. Errichte auf A D in allen Theilungspunkten senkrechte Linien, wie hier 1 F, 2 G, 3 H, 4 I und 1 f, 2 g, 3 h, 4 i, bis an die

die Umkreise der, über A D und E D beschriebenen Halbkreise; aus dem Punkte D aber ziehe man die grade Linie D K, auf A D senkrecht.

4°. Beschreibe aus D mit D F, D G, D H, D I die Kreisbögen F K, G L, H M, I N bis an D K, und bestimme dadurch auf D K die Punkte K, L, M, N. Und eben so beschreibe man aus D mit D f, D g, D h, D i die Kreisbögen f k, g l, h m, i n bis an D A, und bestimme dadurch auf D A die Punkte k, l, m, n.

5°. Trage die Entfernung der Punkte K k, L l, M m, N n, der Ordnung nach, aus D in p, q, r, s, und ziehe durch diese Punkte mit D C die gleichlaufenden Linien p P, q Q, r R, s S, und bestimme dadurch auf A B die Punkte P, Q, R, S.

6°. Ziehe durch P, Q, R, S mit A D oder B C die gleichlaufenden Linien P T, Q U, R V, S W, so theilen dieselben das gegebene Viereck A B C D, wie verlangt worden, in die fünf gleichen Theile A P T D, P Q U T, Q R V U, R S W V, S B C W.

Der Grund dieser Zeichnung ist folgender.

Nach der Zeichnung ist P T = p D eben so groß als die Entfernung der Punkte K und k von einander; da nun eine grade Linie von K nach k gezogen, die schiefe Seite eines rechtwinklichten Dreyeckes giebt, so ist nach §. 273 Kk^2, folglich auch $PT^2 = DK^2 + Dk^2$.

Es ist aber nach §. 263.

D A : D F = D F : $\frac{4}{5}$ D A, und eben so

$DE : Df = Df : \frac{1}{5} DE$

folglich $DF^2 = \frac{4}{5} DA^2$ und $Df^2 = \frac{1}{5} DE^2$, oder da $DK = DF$ und $Dk = Df$ ist genommen worden, so kann auch $DK^2 = \frac{4}{5} DA^2$ und $Dk^2 = \frac{1}{5} DE^2$ gesetzet worden, und so folgt

$PT^2 = \frac{4}{5} DA^2 + \frac{1}{5} DE^2 = DA^2 - \frac{1}{5} DA^2 + \frac{1}{5} DE^2$

oder wenn auf beiden Seiten DA^2 weggenommen, und für DE, BC gesetzet wird, da $DE = BC$ nach §. 133, so ist

$PT^2 - DA^2 = \frac{1}{5} BC^2 - \frac{1}{5} DA^2$

oder indem man hier alle Zeichen umkehrt.

$DA^2 - PT^2 = \frac{1}{5} DA^2 - \frac{1}{5} BC^2$.

Wird nun jede Seite der Gleichung in Faktoren aufgelöst, so ist

$(DA + PT)(DA - PT) = \frac{1}{5}(DA + BC)(DA - BC)$

und so folgt

$(DA + BC)(DA - BC) : (DA + PT)(DA - PT) = 5 : 1.$

Zieht man nun von P und B nach D die graden Linien PD, BD, so wird nach §. 256

$APD : DPT = DA : PT$

$ABD : DBC = DA : BC$

woraus nach §. 214. 3° folget

$APTD : APD = DA + PT : DA$

$ABCD : ABD = DA + BC : DA$ oder

$ABCD : APTD = \begin{pmatrix} ABD : APD \\ AD + BC : AD + PT \end{pmatrix}$

Es ist aber ABD : APD = AB : AP = AE : Ap = DA — ED : DA — pD = DA — BC : DA — PT demnach

$$ABCD : APTD = \begin{pmatrix} DA - BC : DA - PT \\ DA + BC : DA + PT \end{pmatrix}$$

Da nun wie oben gezeiget worden $\begin{pmatrix} DA - BC : DA - PT \\ DA + BC : DA + PT \end{pmatrix} = 5 : 1$, so ist auch

$$ABCD : APTD = 5 : 1$$

auf eben die Art kann bewiesen werden, daß

ABCD : AQUD = 5 : 2
ABCD : ARVD = 5 : 3
ABCD : ASWD = 5 : 4
ABCD : ABCD = 5 : 5 sey.

Woraus nach §. 217 folget

ABCD : APTD = 5 : 1
ABCD : PQUT = 5 : 1
ABCD : QRVU = 5 : 1
ABCD : RSWV = 5 : 1
ABCD : SBCW = 5 : 1

daher geschlossen wird, weil in jeder Verhältnißgleichung drey Glieder gleich sind.

APTD = PQUT = QRVU = RS WV = SBCW, wie erfordert wird.

Anmerkung. Soll das gegebene Viereck nicht in gleiche Theile, sondern nach einem gegebenen Verhältniß eingetheilet werden, so müssen die Linien AD, DE, nicht wie hier geschehen, in gleiche Theile, sondern nach dem gegebenen Verhältniß eingethei-

let werden, wovon der Grund aus dem vorigen auch leicht einzusehen ist.

§. 446.

Ein gegebenes Viereck, welches zwo gleichlaufende Seiten hat, in ein anderes Viereck zu verwandeln, dessen Grundlinie, und ein Winkel an derselben, einerley sey, mit der Grundlinie und einem anliegenden Winkel des gegebenen Vierecks, darinnen aber zwo Seiten gleichlaufen, und der andere Winkel an der Grundlinie einem gegebenen gleich sey.

Tab. X. Es sey das Viereck ABCD fig. 294 gegeben, welches zwo gleichlaufende Seiten AD, BC hat, und es solle in ein anderes verwandelt werden, dessen Grundlinie BC, der eine Winkel an der Grundlinie B, der andere aber dem gegebenen a gleich sey.

1°. Verwandele man das gegebene Viereck BCD nach §. 428 in das Dreyeck EBC dessen eine Spitze mit der Ecke C des gegebenen Vierecks zusammenfalle.

2°. Setze nach §. 439 auf BC das Viereck FBCG gleich dem gegebenen Dreyecke EBC, dergestalt daß der Winkel GCB an der Grundlinie dem gegebenen Winkel a gleich sey, so ist geschehen was verlangt worden.

Der Grund dieser Zeichnung ist für sich klar.

§. 447.

Ein jedes gegebenes Viereck, in gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien mit einer bestimmten Seite desselben gleichlaufen.

Es sey das Viereck ABCD fig. 295 in Tab. X. sieben gleiche Theile zu zerfällen, und BC die Seite desselben mit welcher die Theilungslinien gleichlaufen sollen.

1°. Schneide man durch ED, gleichlaufend mit BC, das Dreyeck AED ab, und verwandele dasselbe, nach §. 439, in das Viereck FEDG, so ist das Viereck ABCD dadurch in das Viereck FBCG verwandelt, welches zwo gleichlaufende Seiten FG, BC hat.

2°. Theile das Viereck FBCG nach §. 445 in die sieben gleiche Theile FabG, acdb, cefd, eghf, gikh, ilmk, lBCm.

3°. Verwandele nach vorigen §. das Viereck eEDf in das ihm gleiche Viereck αEDβ.

4°. Theile das Dreyeck A$\alpha\beta$ nach §. 442 in eben so viele gleiche Theile, durch die mit $\alpha\beta$ gleichlaufenden Linien $\gamma\delta$, $\eta\zeta$ ein, als das Viereck FefG Theile enthält, so ist das gegebene Viereck ABCD, wie verlangt ist worden, in die sieben gleiche Theile A$\eta\zeta$, $\eta\gamma\delta\zeta$, $\gamma\alpha\beta\delta$, αghDβ, gikh, ilmk, lBCm, durch die mit BC gleichlaufenden Linien $\eta\zeta$, $\gamma\delta$, $\alpha\beta$, gh, ik, lm gehörig eingetheilt.

Der Grund dieses Verfahrens ist für sich klar.

Anmerkung. Trift es sich, daß die Theilungslinie ef des Viereckes FBCG, mit ED zusammenfällt, so kann man die bey 3° angegebene Verwandlung ersparen, indem diese wegfällt. Sollte übrigens das gegebene Viereck ABCD nicht in gleiche Theile, sondern nach einem gegebenen Verhältniß, eingetheilet werden, so müßte auch das Viereck FBCG nach eben diesem Verhältniß eingetheilet, und damit eben so verfahren werden wie hier gezeiget worden, ausser daß auch das Dreyeck Aαβ, in eben dem Verhältniß als das Viereck FefG eingetheilet werden müßte.

§. 448.

Eine jede gegebene geradlinigte Figur in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile, aus einer Ecke derselben, einzutheilen.

Tab.X. Es sey ABCDEFG fig. 296 die gegebene geradlinigte Figur, welche aus A in sieben gleiche Theile zerfället werden soll.

1°. Verwandele man die gegebene Figur nach § 428 in das Dreyeck AHI.

2°. Theile das Dreyeck aus der Spitze A nach §. 440 in die sieben gleiche Dreyecke AHK, AKL, ALM, AMN, ANO, AOP, API.

3°. Nach

3°. Nach den Punkten M, N, O, welche in der Seite DE der gegebenen Figur liegen, ziehe man, von A, die graden Linien AM, AN, AO, so sind diese schon Theilungslinien der gegebenen Figur.

4°. Da der Theil ALM des Dreyeckes AHI ein Dreyeck mLD enthält, welches aufserhalb der gegebenen Figur liegt, so lege man ein Linial an A und D, und ziehe mit der eingebildeten Linie AD, durch L die gleichlaufende Ll bis an DC, von A bis l aber die grade Linie Al, welche wiederum eine Theilungslinie der gegebenen Figur seyn wird.

5°. Eben so verfahre man bey dem Punkte K; da aber die, mit AD gleichlaufende Linie Kk die Seite DC nicht erreichet, so verlängere man DC bis an Kk in k, und bringe dadurch den Punkt K auf k, lege ferner das Linial an A und C und ziehe durch k mit der eingebildeten Linie AC die gleichlaufende kq, bis an CB, von A nach q aber die grade Linie Aq, so ist dadurch k auf q gebracht, und Aq eine neue Theilungslinie der vorgegebenen Figur, und hiermit die Arbeit auf der linken Seite der Figur völlig vollendet.

6°. Da das Dreyeck AOP ein Viereck FEPp enthält, welches aufserhalb der Figur lieget, so ziehe man, von A nach E, die grade Linie AE, oder bilde sich wenigstens dieselbe als gezogen ein, mit AE aber, durch P, die gleichlaufende Pq bis an FG in q, so wird dadurch

durch das Dreyeck AOP in die Figur AOE qA verwandelt, von welcher bloß das Dreyeck FqE noch ausserhalb der gegebenen Figur liegt.

7°. Man ziehe daher von A durch q die grade Linie Aq bis in r und durch E mit FG die Linie lr, gleichlaufend mit FG bis an Ar in r, endlich aber aus F nach r die grade Linie Fr, so ist das Dreyeck FqE in das Dreyeck Fqr verwandelt.

8°. Ziehe zuletzt durch r mit AF die gleichlaufende Linie rs, bis an FG, von s aber, nach A, die grade Linie sA, so ist diese die gesuchte Theilungslinie der Figur, und die sieben gleiche Theile derselben sind ABq, ACql, Al Dm, AMN, ANO, AOEFsA, AsG.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 252, und wird leicht eingesehen, wenn man nur bemerkt, daß Dreyecke auf AD errichtet, deren Spitzen in l, und L fallen gleich groß sind. Eben so sind zwey Dreyecke welche auf AD gestellet werden können, und deren Spitzen in K und k liegen, von gleicher Größe. Stellt man sich daher über AC Dreyecke vor, deren Spitzen in k und q sich befinden, so sind diese gleich, und daraus ist sodenn klar, daß die Figur AMDCqA den beyden Dreyecken AML, ALK zusammen gleich seyn müsse, woraus genugsam erhellet daß AMlA dem Dreyecke AML, AlCqA dem Dreyecke ALK und AqB dem Dreyecke AKH gleich seyn müsse.

Eben

Eben so erhellet auf der rechten Seite, daß AOP = AOE + AEP = AOE + AqE = AOEFA + AFq + qFE = AOEFA + AFq + qFr = AOEFA + AFr = AOEFA + AFs = AOEFsA, folglich daß auch das Dreyeck API = AsG seyn müsse.

Anmerkung. Sollte die gegebene Figur nicht in gleiche Theile, sondern nach einem gegebenen Verhältniß eingetheilet werden, so wird die Figur erst nach §. 428 in ein Dreyeck gehörig verwandelt, und die Grundlinie des gefundenen Dreyeckes statt in gleiche Theile nach dem gegebenen Verhältniß eingetheilet, übrigens aber eben so wie hier verfahren Wer das hier gesagte richtig eingesehn hat, wird leicht auf eine ähnliche Art jede vorgegebene geradlinigte Figur, sowohl aus einem, in einer Seite der Figur bestimmten, als auch aus einem, innerhalb derselben gegebenen Punkt, in gleiche Theile oder nach jedem andern gegebenen Verhältnisse einzutheilen im Stande seyn. Wir haben deshalb einen der schwersten Fällen gewählt, damit derselbe desto besser zur Anleitung dienen könne, in andern Fällen wird allemahl ein wenig Ueberlegung den Weg zeigen, welchen man betreten muß, wenn man nur stets den §. 252 vor Augen hat, und von dem Satz nicht abgeht, daß immer eben so viel von einer Figur hinweg=

weggenommen werden müsse, als zu derselben hinzugekommen, oder umgekehrt. Endlich ist zu bemerken, daß, wenn eine geradlinigte Figur mit vielen einwärtstretenden Winkeln, wie hier aus einer bestimmten Ecke der Figur, eingetheilet werden soll, öfters sehr ungestallte Figuren zum Vorschein kommen, indem zuweilen zusammengehörige Theile gänzlich von einander getrennt, und zwischen fremden Theilen liegend, erhalten werden. Eben dieses trift sich öfters, wenn der Punkt aus welchem die Theilung geschehen soll, in einer Seite der Figur, oder innerhalb derselben bestimmt wird. Dieses wird aber jederzeit durch folgende Aufgabe vermieden.

§. 449.

Eine jede gegebene geradlinigte Figur, noch auf eine andere Art, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu zerfällen.

Tab.X. Erster Fall. Die gegebene Figur ABCDEF fig. 297 habe lauter auswärtsgehende Winkel, und solle in vier gleiche Theile zerfället werden.

1°. Nehme man zwey beliebige Punkte G, H im Umkreise der gegebenen Figur an, und ziehe dieselbe mit einer graden Linie GH zusammen.

2°. Ver-

2°. Verwandele nach §. 429 die gegebene Figur ABCDEF in ein Dreyeck GIK, dessen Spitze in G, und dessen Grundlinie IK in diejenige Seite der gegebenen Figur falle, worinnen der Punkt H ist angenommen worden.

3°. Ziehe durch I und K mit GH die gleichlaufenden Linien Ig, Kn, und theile GH bey a, b, c in eben so viele gleiche Theile als die Figur selbst erhalten soll, demnach hier in 4 gleiche Theile.

4°. Lege ein Linial an E und a, und ziehe durch I mit Ea die gleichlaufende Linie Id bis an EF, von d aber nach a die grade Linie da, so ist dEHa der vierte Theil von FEHG.

5°. Verlängere ad bis in e auf Ig, lege ein Linial an d und b, und ziehe durch e mit db eine gleichlaufende Linie gf bis an EF, endlich aber von f nach b die grade Linie fb, so ist auch fdab der vierte Theil von FEHG.

6°. Auf eben die Art gehe man weiter, und eben so verfahre man auf der andern Seite; trift es sich nun, wie bey k, daß die mit bi-gleichlaufende Linie kl nicht die Seite DC erreicht, so verlängere man DC bis in l, ziehe kl mit bi gleichlaufend bis an Dl, und bringe den gefundenen Punkt l dadurch auf die Seite BC in m: daß man ein Linial an b und C lege, und durch l die Linie lm mit bC gleichlaufend ziehe; sobald aber m ist gefunden worden, kann bm gezogen, und dadurch baiCm, gleich dem vierten von GHDCBA, abgeschnitten

wer-

werden. Hierdurch werden aber die Theile AFhcoBA, hfbmoc, fdaiCmb, dEDia unter einander völlig gleich, und folglich ist die Figur ABCDEF wie verlangt ist worden, in vier gleiche Theile zerfället.

Tab.X. Zwoter Fall. Die gegebene Figur sey ABCDEFGH fig. 298, welche bey C einen einwärtsgehenden Winkel hat, und solle in drey gleiche Theile zerfället werden.

1°. Ziehe man, wie im ersten Fall die grade linie IK willkührlich, und theile dieselbe hier in drey gleiche Theile bey a und b.

2°. Nachdem die Figur in das Dreyeck ILM ist verwandelt worden, so verfahre man, auf der linken Seite derselben, so wie es im ersten Fall ist gezeiget worden.

3°. Weil aber auf der rechten Seite eine, mit aE durch M gezogene gleichlaufende Linie die Seite ED nicht erreicht, so verlängere man ED bis in e, wo sie die durch M mit Ea, gleichlaufende linie Me erreicht, und bringe dadurch den Punkt M auf die verlängerte Seite ED in e.

4°. lege das Linial an a und D und ziehe durch e die gleichlaufende linie ef bis an DC, so ist dadurch der Punkt c auf DC in f gebracht; wird daher af gezogen, so ist aKEDfa der dritte Theil von IKEDCBAI.

5°. Verlängere man af, bis an MO in O, und bringe dadurch den Punkt O auf die bis in g verlängerte Seite CD: daß man ein Linial

an

an b und D legt, und durch O die gleichlaufende Linie Og bis an Cg zieht.

5°. Um nun den gefundenen Punkt g, welcher in die verlängerte Seite CD liegt, auf die Seite CB zu bringen, so verlängere man die Seite CB bis in h, lege ein Linial an b und C, und ziehe die gleichlaufende Linie gh bis an Ch, so ist g auf die verlängerte Seite CB in h gebracht.

6°. Auf eben die Art bringt man endlich h auf die Seite BA in i, indem man ein Linial an b und B legt, und durch h die gleichlaufende Linie hi zieht; ist aber der Punkt i auf AB bestimmt, so darf nur von b nach i die grade Linie bi gezogen werden, um damit den dritten Theil biBCfab von IKEDCBAI abzuschneiden.

Um den Grund dieses Verfahrens richtig einzusehen, wollen wir die rechte Seite der 298 Figur nehmen, weil dieser der schwereste Fall ist, und die übrigen Fälle alle sich weit leichter einsehen lassen.

Da nach §. 429 das Dreyeck IKM der Figur IKEDCBA gleich gemacht ist worden, so folgt daß auch der dritte Theil des Dreyeckes der dritte Theil der gegebenen Figur seyn müsse. Wird nun IK bey a und b in drey gleiche Theile zerfällt, und man zieht von a und b nach M die graden Linien aM, bM, so ist nach §. 252 IMb = bMa = aMK, folglich ein jedes dieser Dreyecke der dritte Theil der Figur IABC DEK.

Nun ist aber, mit Zuziehung der Zeichnung und des §. 252.

aMK = aKE + aEM = aKE + aEe = aKE + aED + aDe = AKED + aDf = aKEDfa, folglich aKEDfa der dritte Theil der Figur IABCDEK.

Ferner ist bMa = bOa = baf + bfO = baf + bfg = bafCb + bCf + fbg = bafCb + bCg = bafCb + bCh = bafCb + bCB + bBh = bafCBb + bBi = bafCBib, demnach auch bafCBib der dritte Theil der Figur IABCDEK.

Endlich da KEDCBib zwey Drittheile von IABCDEK ist, so muß nothwendig auch IbiAI noch ein Drittheil derselben seyn, und die Figur IABCDEK ist durch bi, und af in drey gleiche Theile zerfället.

Eben so kann bewiesen werden, daß die Linien db, ca die Figur IHGFK in die drey gleichen Theile IHGdb, bdca und acFK eintheilen, woraus folget: daß die gegebene Figur ABCDEFGH durch die Linien dbi, und caf, so bey b und a gebrochen sind, in die drey gleiche Theile AHGdbi, ibdcafCBi, und facFEDf, wie verlangt worden, gehörig zerfället ist.

Anmerkung. Sollte eine vorgegebene Figur nicht in gleiche Theile, sondern nach einem gegebenen Verhältniß eingetheilet werden, so bleibt alles, so wie es hier ist gezeiget worden, ausser nur daß, statt IK in glei-

che Theile einzutheilen, eben diese Linie nach dem gegebenen Verhältniß eingetheilet werden muß. Merket man aber auf das Verfahren, wodurch nach und nach der Punkt M auf f oder der Punkt O auf i gebracht ist worden, so wird man leicht gewahr: daß dies immer erhalten wird, wenn man ein Linial an denjenigen Punkt, aus welchem die Eintheilung geschehen soll, und derjenigen Ecke legt davon die Seite auf welche der gegebene Punkt gebracht werden soll ein Schenkel ist, durch den gegebenen Punkt aber eine gleichlaufende Linie, bis an die, wenns nöthig ist, verlängerte Seite, gehörig zieht. So haben wir M dadurch auf die verlängerte Seite ED in e gebracht, daß wir ein Linial an den Punkt a, aus welchem die Eintheilung geschehen sollte, und an die Ecke E, davon ED ein Schenkel ist, anlegten, durch M aber bis an die in c verlängerte Linie ED eine gleichlaufende Linie Me, mit dem bey a und E angelegten Linial zogen. Durch ein ähnliches Verfahren brachten wir e auf f, um von a nach f die wahre Theilungslinie af ziehen zu können. Merket man sich daher ein für allemahl diese Vorschrift, so kann man nie darüber verlegen seyn, wie jede vorgegebene Figur in gleiche Theile, oder nach einem gegebenen Verhältniß eingetheilet werden müsse,

die Punkte aus welchen die Eintheilungen geschehen sollen, mögen auch liegen wo sie wollen.

§. 450.

Wenn die Theilungslinien einer Figur aus gebrochenen Linien bestehen, dieselben in grade Linien zu verwandeln.

Tab. X. Es sey die Figur ABCDEF fig. 297 nach vorigen §. durch die gebrochenen linien hco, fbm, und dai gehörig eingetheilet, und man wolle, statt die Figur durch gebrochene linien zu theilen, dieses durch grade Linien verrichten.

Wir haben mehrerer Deutlichkeit willen die 297te Figur in Figur 299 übertragen, worinnen auch alle Theile mit eben den Buchstaben wie fig. 297 bezeichnet sind.

1°. Lege man ein linial an d und i, bemerke auf CD den Punkt p, wo eine durch a mit di gleichlaufende linie die Seite DC erreicht, und ziehe von d nach p die grade linie dp, so ist diese die Theilungslinie, welche die Stelle der gebrochenen linie dai vertritt.

2°. Eben so verfahre man bey fbm, und verwandele diese gebrochene Theilungslinie in die grade fq, indem man, wie bey 1° ist gezeiget worden, auf CB den Punkt q eben so bestimmt, wie p auf CD ist gefunden worden.

3°. Findet sich endlich, wie bey h c o, daß eine, durch c mit h o gleichlaufende Linie die Seite C B, worinnen der Punkt o liegt, nicht erreicht, so verlängere man C B bis an die mit h o durch c gleichlaufende Linie c r in r, und bringe zuletzt den Punkt r dadurch auf die Seite B A in s, daß man r s mit h B gleichlaufend zieht, so wird die Linie h s die Stelle der gebrochenen Linie h c o vertreten, und die gegebene Figur wird nunmehr in die vier gleiche Theile F h s A, h f q B s, f d p C q, d E D p durch die graden Linien h s, f q, d p gehörig eingetheilet seyn.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 252, und wird leicht eingesehen, wenn man nur bemerkt, daß d a i = d p i; f b C = f q C und h c o = h r o = h B o + h r B = h B o + h s B = h o B s ist.

Anmerkung. Aus diesem Verfahren erhellet genugsam, wie in andern Fällen die Eintheilung jeder vorgegebenen Figur geschehen könne, auch machen die einwärtsgehenden Winkel keine Aenderung die wesentlich wäre, und ein jeder der das hier gesagte richtig verstanden hat, wird sich selbst in allen Fällen leicht Raths erholen können.

§. 451.

Die Theilungslinien einer bereits eingetheilten geradlinigten Figur so zu ver-

verändern, daß sie sämmtlich mit einer gegebenen Seite der Figur gleichlaufen.

Tab. X. Es sey ABCDEF fig. 300 eine nach §. 448 eingetheilte Figur, deren Theilungslinien nach vorigen §. in die graden linien hs, fq, dp verwandelt worden, weshalb wir auch die fig. 300 denen bey eben angeführten §. §. gebrauchten Figuren fig 297. 299 völlig gleich genommen haben; man soll die Theilungslinien so verändern daß dieselben mit der Seite ED der gegebenen Figur gleichlaufen.

1°. Ziehe man durch d mit ED die gleichlaufende linie de bis an DC, und verwandele das, von dem Theile dEDp übriggebliebene Dreyeck dep nach §. 439 in das Viereck kdeg, bey welchem kg mit de gleichläuft, so ist die Theilungslinie dp in die mit ED gleichlaufende kg verändert.

2°. Verändere die Theilungslinie fq dergestallt, daß die neue Theilungslinie kC, durch eine Ecke C der Figur gehe, welches immer erhalten wird, wenn an f und C ein linial gelegt, und durch q eine gleichlaufende linie qk bis an FE, von k nach C aber die grade linie kC gezogen wird.

3°. Ziehe durch C mit ED die gleichlaufende linie Co, und verwandele das Dreyeck Cko nach §. 439 in das Viereck noCr, so ist kC wieder in die mit ED gleichlaufende nr verwandelt, und nkgCr = fkgCq = fdpCq.

4°. Eben

4°. Eben so verfahre man bey h s indem man diese Theilungslinie erstlich in F u, und zuletzt in die mit E D gleichlaufende Linie v w verändert, so ist die gegebene Figur durch die gleichlaufenden Linien v w, n r, k g, so wie verlangt ist worden, eingetheilet.

Der Grund dieser Zeichnung beruhet auf §. 252 und wird ohne Mühe daraus eingesehn.

Anmerkung. Ich halte es für überflüßig mehrere Fälle dieser Art hier durchzugehn, indem das hier gesagte genügen kann, um in allen Fällen mit einiger Ueberlegung die vorgelegten Fragen gehörig zu beantworten.

Nachtrag zu den Zeichnungen der Meßkunst.

§. 452.

Eine gegebene grade Linie, eben so wie §. 388 verlangt ist worden, durch ein anderes Verfahren einzutheilen.

Es sey A B fig. 301 die gegebene grade Linie, welche eben so wie §. 388 verlangt ist worden, eingetheilet werden soll. Tab. X.

1°. Errichte man in A auf A B nach §. 395 die senkrechte Linie A C, halb so groß als die gegebene Linie A B.

2°. Beschreibe aus C mit CA den Kreis ADE, und ziehe CB so wird der Punkt D bestimmt.

3°. Beschreibe aus B mit BD den Kreisbogen DG, so wird auf BA der Punkt G dergestalt bestimmt, daß $BG^2 = AB . AG$ wird, so wie solches verlangt ist worden.

Der Grund dieser Zeichnung ist folgender.

Zufolge der Zeichnung berührt AB den Kreis ADE in A, wird daher BG bis in E verlängert, so folgt nach der Anmerkung §. 262.

$BD : BA = BA : BE$ und hieraus nach §. 215.

$BD : BA - BD = BA : BE - BA.$

Da nun $BD = BG$, so ist auch $BA - BD = BA - BG = AG$, und da $CA = CD = CE = \frac{1}{2} AB$, so ist auch $DE = AB$, folglich $BE - BA = BE - DE = BD = BG$, werden nun diese Werthe in die letzte Verhältnißgleichung gesetzt, so kommt

$$BG : AG = AB : BG$$

und hieraus folgt nach §. 218; $BG^2 = AB . AG$ welches zu erweisen war.

Anmerkung. Obgleich diese Art der Zeichnung im Ganzen von der §. 388 vorgetragenen nicht viel abweicht, so ist doch der Beweis derselben viel kürzer als der §. 388 geführte. Uebrigens pflegt man zu sagen eine dergestalt eingetheilte grade Linie

sey

sey in dem mittlern und äussern Verhältnisse zerfället worden.

§. 453.

In einen gegebenen Kreis ein ordentliches Zeheneck einzuschreiben.

Es sey fig. 302 der gegebene Kreis, in welchen ein ordentliches Zeheneck eingeschrieben werden soll. Tab. X.

Man beschreibe auf den Halbmesser CA des gegebenen Kreises nach §. 407 das gleichschenklichte Dreyeck CBA darinnen der Winkel C an der Spitze doppelt größer als jeder Winkel CBA, CAB an der Grundlinie sey, so ist die Grundlinie BA des Dreyeckes CBA die gesuchte Seite des ordentlichen Zehenecks, welche demnach nur in den gegebenen Kreis gehörig herumgetragen werden darf.

Um dieses richtig einzusehen verlängere man BC, AC bis an den Umkreis in b und a, so ist nach §. 114 aCb = ACB, folglich nach §. 160 der Bogen ab dem Bogen AB gleich. Ferner ist nach §. 187 bCA = 2 CBA, und aus eben dem Grunde aCB = 2 CAB oder da CBA = CAB = 2 ACB, so wird ACb + bCa + aCB = 9 ACB demnach auch AB der neunte Theil des Bogens AbaB oder der zehnte Theil des ganzen Umkreises, welches zu erweisen war.

Anmerkung. Da $CD^2 = AD \cdot AC = (AC - CD)\,AC$ seyn muß, und für CD, BA oder die Seite des Zeheneks gesetzt werden kann, so folgt daß

$$AB^2 = (AC - AB)\,AC \text{ oder}$$
$$AB^2 = AC^2 - AB \cdot AC \text{ seyn werde.}$$

Wird aber auf beiden Seiten $\frac{1}{4} AC^2$, und $AB \cdot AC$ hinzugesetzt, so wird

$$AB^2 + AC \cdot AB + \tfrac{1}{4} AC^2 = \tfrac{5}{4} AC^2, \text{ oder}$$
$$(AB + \tfrac{1}{2} AC)^2 = \tfrac{5}{4} AC^2$$

folglich $AB + \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} AC \sqrt{5}$ oder indem auf beiden Seiten $\frac{1}{2} AC$ weggenommen wird

$$AB = -\tfrac{1}{2} AC + \tfrac{1}{2} AC \sqrt{5} \cdot$$
$$= \tfrac{1}{2} AC (\sqrt{5} - 1).$$

Dieses giebt folgende Regel um die Seite eines ordentlichen Zeheneck durch Rechnung zu finden, welches sich in einen gegebenen Kreis einschreiben läßt. Suche die quadrat Wurzel von der Zahl 5, ziehe davon ab 1, theile den Rest durch 2, und vervielfältige mit der gefundenen Zahl den Halbmesser des gegebenen Kreises, so kommt die gesuchte Seite. Kürzer kann man sagen $AB = 0{,}6180340\,AC$.

§. 454.

Auf eine gegebene grade Linie ein ordentliches Zeheneck zu beschreiben.

Es sey AB fig. 303 die gegebene grade Li- Tab. X.
nie, auf welche ein ordentliches Zeheneck errich-
tet werden soll.

1°. Theile man nach §. 452 AB in E in das mittlere und äussere Verhältniß.

2°. Verlängere AB bis in D und nehme BD = BE.

3°. Beschreibe über AB das gleichschenk-
lichte Dreyeck CAB dergestalt: daß CA = CB = AD, so ist C der Mittelpunkt eines Kreises in welchen AB genau zehenmal herumgetragen werden kann, um damit das Zeheneck zu vol-
lenden.

Der Grund dieses Verfahrens ist folgen-
der.

Nach der Zeichnung ist

$$AE : EB = EB : AB$$

und hieraus folgt nach §. 214. 3°.

$$AE + EB : EB = EB + AB \,.\, AB$$

oder $AB : DB = DA : AB$

folglich $AB^2 = DB \,.\, DA$ und weil $DA = AC$

$$AB^2 = (AC - AB) \,.\, AC$$

wie es zufolge der Anmerkung zum vorigen §. erfordert wird.

Anmerkung. Auf diese Art kann demnach auf jede gegebene grade Linie, als Grund-
linie

linie, ein gleichschenklichtes Dreyeck gesetzet werden, dessen Winkel an der Grundlinie, jeder für sich, doppelt größer als der Winkel an der Spitze seyn.

§. 455.

Auf eine gegebene grade Linie ein ordentliches Fünfeck zu beschreiben.

Tab. XI. Es sey CD fig. 304 die gegebene grade Linie auf welche ein ordentliches Fünfeck beschrieben werden soll.

1°. Beschreibe man, zufolge der Anmerkung des vorigen §, über CD als Grundlinie das gleichschenklichte Dreyeck ACD dessen Winkel bey C und D doppelt größer als bey A.

2°. Halbire nach §. 380 die Winkel D und C des beschriebenen Dreyeckes, durch die graden Linien DB, CE und schneide mit CD aus C und D auf DB und CE die Punkte B und E ab.

3°. Ziehe die dergestalt bestimmte Punkte A, B, C und A, E, D durch die graden Linien AB, BC, AE, ED gehörig zusammen, so ist das ordentliche Fünfeck ABCDE auf die gegebene Linie CD beschrieben.

Der Grund dieser Zeichnung ist einerley mit dem worauf sich §. 308 stützet.

§. 456.

§. 456.

In einen gegebenen Kreis ein ordentliches Fünf- und Zeheneck, noch leichter als bereits ist gezeiget worden, einzuschreiben.

Es sey ABCDE fig. 305 der gegebene Kreis, worinnen ein ordentliches Fünf- und Zeheneck sollen eingeschrieben werden. Tab. XI.

1°. Ziehe man den Durchmesser FG in den gegebenen Kreis willkührlich, und errichte in den Mittelpunkt H auf diesen Durchmesser den Halbmesser AH senkrecht nach §. 382.

2°. Theile den Halbmesser FH bey I nach §. 381 in zween gleiche Theile, beschreibe aus I mit IA den Kreisbogen AK bis an FG in K, und ziehe von A nach K die grade Linie AK, so ist HK die gesuchte Seite des Zeheneckes, und AK die Seite des Fünfeckes, davon die erste nur aus A in a, aus a in B, aus B in b u. s. w. die andere aber aus A in B aus B in C u. s. w. getragen werden darf, um im ersten Falle das ordentliche Zeheneck AaBbCcDdEe im andern aber das ordentliche Fünfeck ABCDE in den gegebenen Kreise einzuschreiben.

Der Grund dieser Zeichnung ist folgender.

Aus der Anmerkung des §. 453 folgt, daß wenn r den Halbmesser des Kreises, worinnen ein ordentliches Zeheneck eingeschrieben werden kann, und s die Seite des Zehenecks vorstellen, jederzeit seyn müsse.

(s

$$(s + \tfrac{1}{2} r)s = \tfrac{5}{4} r^2.$$

Nun ist $AI^2 = AH^2 + IH^2$ oder da $AI = IK$, und $AH = r$, $IH = \frac{1}{2} r$, folglich $AH^2 + IH^2 = r^2 + \frac{1}{4} r^2 = \frac{5}{4} r^2$, so folgt

$$IK^2 = \tfrac{5}{4} r^2$$

und dieses mit dem vorigen verglichen, giebt

$$IK^2 = (s + \tfrac{1}{2} r)^2 \text{ oder}$$

$$IH + HK = s + \tfrac{1}{2} r$$

und da $IH = \frac{1}{2} r$, so bleibt bloß

$$HK = s$$

woraus erhellet daß HK die Seite eines ordentlichen Zehenecks ist, welches in den gegebenen Kreis eingeschrieben werden kann. Um nun zu beweisen, daß auch AK die Seite des ordentlichen Fünfecks ist, ziehe man von H nach B eine grade Linie HB, von H auf Aa aber Hf senkrecht, welche AB in g schneidet, so sind die Dreyecke AHB, gHB ähnlich, denn sie haben den Winkel ABH gemein und sind beyde gleichschenklicht, weil bey dem ersten $AH = HB$, bey dem andern aber der Winkel gHB dem Winkel gBH gleich ist, da der erste zum Maaße den Bogen $haB = \frac{3}{2}$ aB, der andere aber zum Maaße den halben Bogen $AeEd = \frac{3}{2}$ aB hat, folglich ist $AB : HB = HB : Bg$ folglich $HB^2 = AB . Bg$. Wird aber von g nach a die grade Linie ga gezogen, so sind auch die Dreyecke Aga, AaB ähnlich, denn sie haben den Winkel aAB gemein, und sind beyde gleichschenklicht, folglich wird

AB:

$AB : Aa = Aa : Ag$

oder $Aa^2 = AB . Ag$

Hieraus aber folgt

$HB^2 + Aa^2 = AB . Bg + AB . Ag = AB (Bg + Ag)$

oder da $HB = AH$ und wie oben gezeiget worden $Aa = HK$, so folgt da auch $Bg + Ag = AB$

$AH^2 + HK^2 = AB^2$

Es ist aber auch, nach §. 273, $AH^2 + HK^2 = AK^2$, folglich muß $AB^2 = AK^2$, oder $AB = AK$ seyn, welches zu erweisen war.

Anmerkung. Da die Seite eines im Kreise eingeschriebenen ordentlichen Sechseckes jederzeit dem Halbmesser des Kreises gleich ist, so erhellet zugleich aus dem hier geführten Beweise, daß, wenn in einem Kreise zugleich ein ordentliches Fünfeck, Sechseck, und Zeheneck eingeschrieben sind, ein ordentliches Viereck auf die Seite des Fünfeckes errichtet, beyden ordentlichen Vierecken, so sich auf die Seiten des Sechsecks und Zehenecks errichten lassen, zusammengenommen, gleich seyn müsse.

§. 457.

Ein gegebenes Viereck, noch auf eine andere Art als §. 447, in gleiche Theile, durch gleichlaufende Linien einzutheilen.

Tab. XI. Es sey A B C D das gegebene Viereck, welches in fünf gleiche Theile, durch grade Linien getheilt werden soll, die sämmtlich mit der Grundlinie B C desselben gleichlaufen.

1°. Ziehe man durch D mit A C die gleichlaufende Linie D E bis an die in E verlängerte Grundlinie B C, und theile B E in eben so viele gleiche Theile als die gegebene Figur A B C D selbsten erhalten soll, demnach hier in fünf gleiche Theile bey a, b, c, d.

2°. Verlängere die Seite A D des gegebenen Vierecks, bis an die in F verlängerte Grundlinie B C, beschreibe über oder unter B F einen Halbkreis B G H I F, und errichte auf B E in a, b, c und wenns nöthig auch in d die senkrechten Linien a G, b H, c I bis an den über B F beschriebenen Halbkreis B G H I F.

3°. Beschreibe mit B G, B H, B I aus B die Kreisbögen G g, H h, I i bis an B F, und ziehe durch g, h, i mit A B gleichlaufende Linien bis A D, davon aber hier nur die beyden ersten g K, h L gezogen werden können, da die dritte, welche durch i laufen müßte, A D nicht mehr erreicht; und dieses ist auch der Grund, warum nicht weiter auch bey d eine senkrechte Linie, auf B F, bis an den Umkreis des über B F beschriebenen Halbkreises, wie bey a, b, c geschehen, errichtet ist.

4°. Ziehe durch die auf A D gefundene Punkte K, L mit B C die gleichlaufenden Linien K M, L N bis an A B, so sind diese schon zwo Theilungs=

lungslinien, und die abgeschnittenen Theile AMK, MNLK nicht nur untereinander gleich, sondern ein jeder auch der fünfte Theil der gegebenen Figur ABCD.

Um aber das übrige Stück NBCDL noch in drey gleiche Theile einzutheilen, verfahre man folgendermassen.

Durch a, b, ziehe man, und wenns nöthig noch durch mehrere Theilungspunkte, die graden linien ak, bl mit AC gleichlaufend, bis an AB in k und l, von den gefundenen Punkten k und l aber nach C die graden linien kC, lC, so entstehen die Dreyecke kBC, lBC, welche nach §. 439 leichte in die Vierecke OBCP und QBCR verwandelt werden können, so werden die graden linien QR, OP den Theil NBCDL der gegebenen Figur ABCD noch in die drey gleiche Theile NQRDL, QOPR, und OBCP, davon ein jeder Theil der fünfte Theil der Figur ABCD ist, gehörig zerfällen.

Der Grund dieses Verfahrens ist folgender.

Da DE mit AC gleichlaufend ist gezogen worden, so ist dadurch die gegebene Figur ABCD gleichsam in das Dreyeck ABE verwandelt; stellt man sich nun von A nach a, b, grade linien Aa, Ab vor, so ist

$$ABa : ABE = Ba : BE$$
$$ABb : ABE = Bb : BE$$

oder da BE bey a, b in fünf gleiche Theile ist zerfället, und $ABE = ABCD$ gemacht worden, so folgt

1) ABa : ABCD = 1 : 5
2) ABb : ABCD = 2 : 5.

Es ist aber zufolge der Zeichnung, nach §. 133, MK = Bg, und NL = Bh, und da zufolge der Zeichnung nach §. 263.

Ba : Bg = Bg : BF
Bb : Bh = Bh : BF

so folgt

Ba : MK = MK : BF
Bb : NL = NL : BF

Da aber wegen den gleichlaufenden Linien MK, NL, BF nach §. 244 auch

MK : BF = AM : AB und
NL : BF = AN : AB seyn muß

so folgt

Ba : MK = AM : AB
Bb : NL = AN : AB.

Hieraus aber ergiebt sich nach §. 272, da die Dreyecke AMK, ANL, ABa, ABb bey M, N und B einen gleichen Winkel haben, daß das Dreyeck AMK dem Dreyecke ABa, und das Dreyeck ANL dem Dreyecke ABb gleich ist; und so lassen sich die gefundenen Verhältnißgleichungen 1. 2 in folgende verwandeln.

AMK : ABCD = 1 : 5
ANL : ABCD = 2 : 5

folglich nach §. 215.

ANL — AMK : ABCD = 2 — 1 : 5

oder MNLK : ABCD = 1 : 5

wel=

welches in Absicht der Theile AMK, MNLK zuerst erwiesen werden mußte.

Da ferner, weil ka, lb mit AC gleichlaufen, nach §. 244 geschlossen werden kann.

kB : Ba = AB : BC und
lB : Bb = AB : BC

so folgt eben so, wie oben nach §. 272, das Dreyeck kBC müsse dem Dreyeck ABa, und das Dreyeck lBC dem Dreyecke ABb gleich seyn.

Es ist daher aus den Verhältnißgleichungen 1 und 2

kBC : ABCD = 1 : 5 und
lBC : ABCD = 2 : 5

Da nun zufolge der Zeichnung OBCP = kBC und QBCR = lBC gemacht ist worden, so folgt auch

OBCP : ABCD = 1 : 5
QBCR : ABCD = 2 : 5

folglich nach §. 215.

QBCR — OBCP : ABCD = 2 — 1 : 5 oder
QOPR : ABCD = 1 : 5

woraus genugsam erhellt, daß auch

NQRDL : ABCD = 1 : 5 seyn müsse.

Anmerkung. Sollte das gegebene Viereck nicht in gleiche Theile, sondern nach einem gegebenen Verhältnisse eingetheilet werden, so kann dieses eben so erhalten werden, nur muß man folgendes gehörig beobachten.

Erstlich muß BE von B gegen E eben so eingetheilet werden, wie die Theile in ABCD von A gegen BC auf einander folgen sollen, um nach dem zuerst beschriebenen Verfahren, nach und nach, die Theile AMK, MNLK von der gegebenen Figur gehörig abzuschneiden.

Zweytens muß eben die Linie BE von B gegen E so eingetheilet werden, wie die Theile in ABCD von BC gegen A auf einander folgen sollen, um nach dem zuletzt erklärten Verfahren, nach und nach, die Theile OBCP, QOPR von dem gegebenen Viereck ABCD abzuschneiden.

Hiervon ist der Grund aus dem oben geführten Beweise leicht einzusehen.

§. 458.

Ein gegebenes Dreyeck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien sämmtlich mit einer, der Lage nach, gegebenen graden Linie gleichlaufen.

Tab. XI Es sey ABC fig. 307 das zu theilende Dreyeck, α die Linie mit welcher die Theilungslinien gleichlaufen sollen, und die Anzahl der Theile auf sieben bestimmt.

1°. Ziehe man durch eine Spitze des gegebenen Dreyeckes, wie hier durch B, mit der gegebenen

gebenen Linie « eine gleichlaufende Linie BD bis an die gegenüberstehende Seite AC.

2°. Theile die Seite AC in eben so viele gleiche Theile als das gegebene Dreyeck ABC erhalten soll, wie hier in sieben gleiche Theile bey den Punkten a, b, c, d, e, f.

3°. Beschreibe über oder unter die Abschnitte AD, DC der Seite AC die Halbkreise AGH!D, DKLMC.

4°. Errichte bey den Punkten a, b, c, d, e, f auf AC die senkrechte Linien aG, bH, cI, dK, eL, fM bis an die Umkreise der über AD, DC beschriebenen Halbkreise.

5°. Beschreibe aus A mit AG, AH, AI die Kreisbögen Gg, Hh, Ii und aus C mit CM, CL, CK die Kreisbögen Mm, Ll, Kk bis an AC.

6°. Ziehe durch die auf AC gefundenen Punkte g, h, i, k, l, m die gleichlaufenden Linien gn, ho, ip, kq, lr, ms, so theilen dieselbe das gegebene Dreyeck gehörig in die verlangten sieben gleichen Theile.

Dieses Verfahren beruhet auf eben dem Grunde wie §. 443, und wird aus dem daselbst geführten Beweise leichte eingesehen. Auch gilt hier eben die Anmerkung welche bey angeführtem §. ist gemacht worden.

Anmerkung. Obgleich diese Auflösung mit der §. 443 gegebenen sehr nahe auf eines hinausläuft, so habe ich doch geglaubt, daß es nicht überflüßig wäre dieselbe hier

noch mit zu nehmen, da sie eigentlich die allgemeine Auflösung einer Aufgabe ist, davon nur §. 443 einen besondern und bestimmten Fall auflöset. Sie ist mir übrigens ganz kürzlich von einem werthen Freunde zugestellet worden, welcher sie von dem großen Lambert bey Gelegenheit einer Stelle in des Riccati Werken erhalten hatte.

Zeichnungen zur Uebung.

§. 459.

In einem gegebenen Kreisabschnitt zwo Sehnen zu ziehen, welche unter einander ein gegebenes Verhältniß haben.

Tab. XI. Es sey ACB fig. 308 der gegebene Kreisabschnitt, und das Verhältniß der Sehnen durch die graden Linien a, b bestimmt.

Erste Auflösung. 1°. Ziehe man aus A eine grade Linie AZ von unbestimmter Länge, unter einem beliebigen Winkel gegen die Sehne AB des gegebenen Kreisabschnittes, und trage von A gegen Z die größte der gegebenen Linien, wie hier a aus A in D, von D aber sowohl gegen A in E, als gegen Z in F die kleinere Linie b.

2°. Ziehe die Punkte B, F mit BF zusammen, durch D aber mit BF die gleichlaufende Linie DG, und endlich, nachdem die Punk-

te

te E und G mit der graden Linie EG zusammengezogen worden, durch D mit EG die gleichlaufende Linie DH bis an die in H verlängerte Sehne AB des gegebenen Kreisabschnittes.

3°. Von H ziehe man, nach §. 393, an den gegebenen Kreisabschnitt die Berührungslinie AC, und von A und B nach dem gefundenen Berührungspunkt C die Sehnen AC, BC, so werden sich dieselben eben so wie die gegebenen graden Linien a, b gegeneinander verhalten.

Der Grund hiervon ist folgender.

Nach der Zeichnung ist $AF = a + b$, $AE = a - b$ und $AD = a$ genommen worden, überdem aber

$$AF : AD = AB : AG \text{ und}$$
$$AE : AD = AG : AH \text{ genommen}$$

worden, folglich ist

$$a + b : a = AB : AG \text{ und}$$
$$a - b : a = AG : AH \text{ oder nach §. 220.}$$

$$(a + b)(a - b) : a^2 = AB : AH$$

folglich

$$a^2 - b^2 : a^2 = AB : AH.$$

Hieraus aber nach §. 215.

$$a^2 : b^2 = AH : BH.$$

Nun ist aber nach §. 262.

$$AH : CH = CH : BH, \text{ und da auch}$$
$$CH : BH = CH : BH, \text{ so folgt nach}$$

§. 220.

$$AH : BH = CH^2 : BH^2, \text{ folglich}$$

muß auch

$a^2 : b^2 = CH^2 : BH^2$ oder
$a : b = CH : BH$ seyn.

Nach §. 196 ist der Winkel BCH dem Winkel CAH gleich, folglich sind die Dreyecke ACH, CBH, welche den Winkel AHC gemein haben, ähnlich, und es wird

$$AC : CB = CH : BH$$

folglich auch

$$AC : CB = a : b$$

welches zu erweisen war.

Tab. XI, Zwote Auflösung. 1°. In den gegebenen Kreisabschnitt *ADB fig.* 309 ziehe man von einem beliebigen Punkte *D* nach den Endpunkten *A*, *B* der Sehne *AB* die graden Linien *DA*, *DB*.

2°. Setze an *AB* in *B* den Winkel *ABF* $=$ *ADB*, trage von *B* gegen *A* auf *BA* in *G* die erste der gegebenen Linien, wie *a*, und auf *BF* von *B* gegen *F* in *E* die zwote gegebene Linie *b*.

3°. Ziehe die gefundenen Punkte *G*, *E* mit der graden Linie *GE* zusammen, und ziehe durch *A* mit *GE* die gleichlaufende Linie *AF* bis an *BF*, endlich aber von *C* nach *B* die grade Linie *CB*, so sind *AC*, *CB* die gesuchten Sehnen deren Verhältniß $=$ *a* : *b*.

Der Grund dieses Verfahrens ist folgender.

Zufolge §. 189 ist der Winkel *ACB* $=$ *ADB* und da nach der Zeichnung der Winkel *ABF* $=$ *ADB* gemacht worden, so ist *ACB* $=$ *ABF*

$= ABF$, überdehm haben aber die beyden Dreyecke ACB, ABF den Winkel FAB gemein, folglich sind sie, nach §. 240 ähnlich, und es wird

$$AC : CB = AB : BF.$$

Es ist aber nach der Zeichnung zufolge §. 237.

$$BG : BE = AB : BF$$

folglich ist auch

$$AC : CB = BG : BE$$

oder, da $BG = a$, und $BE = b$ genommen worden

$AC : CB = a : b$, so wie es verlangt ist worden.

§. 460.

In ein gegebenes Dreyeck ein anderes Dreyeck einzuschreiben, das einem gegebenen Dreyecke ähnlich sey, und dessen eine Seite mit einer Seite des Dreyeckes, worinnen es eingeschrieben werden soll, einen gegebenen Winkel mache.

Es sey ABC *fig.* 311 das Dreyeck, worinnen ein Dreyeck dergestalt eingeschrieben werden soll, daß es dem Dreyecke $\alpha\beta\gamma$ *fig.* 310 ähnlich, und dessen eine Seite so mit $\beta\gamma$ eine ähnliche lage erhalten soll, die Seite AC unter den gegebenen Winkel Φ schneide. Tab. XI.

1°. Setze man an AC in C einen Winkel ACb dem gegeb.nen Winkel Φ gleich nach

§. 385, und verlängere den Schenkel Cb dieses Winkels bis an den bis in b verlängerten Schenkel AB.

2°. Beschreibe nach §. 419 auf bC das, dem Dreyecke $\alpha\beta\gamma$ ähnliche Dreyeck bCa, dergestalt: daß bC, $\beta\gamma$ ähnliche Seiten werden, und ziehe von der Spitze A des Dreyeckes ABC nach der Spitze a des Dreyeckes baC die grade Linie Aa, und bemerke auf BC den Punkt c wo Aa die BC schneidet.

3°. Ziehe durch c mit ab und aC die gleichlaufenden Linien cf, cg bis an AB und AC, und vereinige die Punkte f und g durch die grade Linie fg, so ist das Dreyeck cfg, so wie verlangt ist worden, in das gegebene Dreyeck ABC eingeschrieben.

Der Grund hiervon ist folgender.

Da cf mit ba und cg mit aC gleichlaufen, so ist der Winkel fcg, dem Winkel baC gleich, überdehm aber, wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke Afc, Aba und Agc, ACa nach §. 244.

$$fc : ba = Ac : Aa$$
$$cg : Ca = Ac : Aa$$

folglich auch

$$fc : cg = ba : Ca$$

demnach ist, zufolge §. 241, das Dreyeck fcg dem Dreyecke baC ähnlich: da nun nach der Zeichnung das Dreyeck baC dem Dreyecke $\alpha\beta\gamma$ ähnlich gemacht ist worden, so folgt: daß auch das Dreyeck fcg dem Dreyecke $\alpha\beta\gamma$ ähnlich

lich seyn müsse, und die mit $\beta\gamma$ ähnlichliegende Seite fg des eingeschriebenen Dreyeckes schneidet auch die Seite AC unter dem Winkel $Agf = ACb = \varphi$, so wie verlangt ist worden.

Anmerkung. Wollte man daß fg mit BC gleichlaufen sollte, so müßte der Winkel $\varphi = ACB$ genommen werden, woraus erhellet: das in diesem Fall nicht nur bC auf BC fallen müßte, sondern der Punkt b würde auch auf B zu liegen kommen; in diesem Falle müßte daher auf BC ein, dem Dreyecke $\alpha\beta\gamma$ ähnliches Dreyeck beschrieben, und übrigens, so wie hier gezeiget, verfahren werden. Durch ein ähnliches Verfahren lässet sich auch in jedes gegebene Dreyeck ein gleichgestrecktes Viereck einschreiben, welches einem gegebenen gleichgestreckten Vierecke ähnlich ist. Woraus folget: daß in jedes gegebene Dreyeck ordentliche Vierecke, und Rechtecke, deren Seiten ein gegebenes Verhältniß haben, können eingeschrieben werden.

§. 461.

Zwischen die Schenkel eines gegebenen Winkels einen Kreis zu beschreiben, welcher die Schenkel berühre, und durch einen der Lage nach bestimmten Punkte gehe.

Tab. XI Es sey BAC fig. 312 der gegebene Winkel, und H der bestimmte Punkt.

1°. Theile man den Winkel BAC nach §. 380 durch AD in zween gleiche Theile BAD, DAC.

2°. Nehme auf AD einen willkührlichen Punkt E, und ziehe von E nach §. 383 auf AC die senkrechte linie EF.

3°. Ziehe von A nach H die grade linie AH, schneide AH aus E mit EF in G, ziehe EG, und mit EG durch H die gleichlaufende linie HI bis an AD, so ist I der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, welcher mit IH beschrieben, die Schenkel AC, AB des gegebenen Winkels BAC berühret.

Der Grund dieser Zeichnung ist folgender.

Durch I ziehe man IK mit FE gleichlaufend, so ist nach §. 244.

1) FE : IK = AE : AI.

Und aus eben dem Grunde, weil EG und IH gleichlaufen.

2) EG : IH = AE : AI

folglich wenn 2 mit 1 verglichen wird

FE : EG = IK : IH.

Da nun nach der Zeichnung FE = EG, so muß auch IK = IH seyn, folglich gehet der mit IH beschriebene Kreis durch K, und da IK mit EF gleichläuft, FE aber auf AC senkrecht stehet, so ist auch IK auf AC senkrecht, §. 119, folglich berühret der aus I mit IH beschriebene Kreis

den

den Schenkel AC in K §. 184; ziehet man aber, von I auf AB, die senkrechte Linie IL, so sind die Dreyecke IAK, IAL einander gleich §. 136, folglich IK, IL von gleicher Größe, und der aus I mit IH = IK = IL beschriebene Kreis gehet durch L, und berühret nach §. 184 den Schenkel AB in L.

Anmerkung. Da AH mit EF aus E nicht nur in G sondern auch in M geschnitten werden kann, so muß es auch auf AD ausser I nach einen andern Punkt geben, aus welchem sich durch H ein Kreis beschreiben läßt, der die Schenkel AB, AC berühre. Liegt daher der gegebene Punkt H zwischen AC oder AB und der halbirenden Linie AD, so giebt es allemal zwey Kreise welche der Aufgabe Genüge leisten; liegt aber H auf AD selbst, so giebt es nur einen Kreis. In diesem Fall verfahre man folgendermaßen.

Auf AB und AC trage man, aus A beliebige aber gleiche Entfernungen Ap, Ao, ziehe p, o mit op zusammen, und durch den, auf AD bestimmten Punkte, wie N, mit op eine gleichlaufende Linie OP, so entsteht das Dreyeck AOP. Wird nun in dieses Dreyeck nach §. 400 ein Kreis eingeschrieben, so wird derselbe durch N gehen, und die Schenkel AB, AC des gegebenen Winkels BAC berühren.

§. 462.

Wenn zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels ein Kreis liegt, einen andern Kreis zwischen eben die Schenkel zu beschreiben, welcher den ersten Kreis und die Schenkel des gegebenen Winkels berühre.

Tab. XI. Es sey ABC fig. 313 der gegebene Winkel, nnd D der, zwischen den Schenkeln AB, AC, liegende Kreis.

1°. Halbire man den gegebenen Winkel BAC durch AE, nehme auf AE einen Punkt F willkührlich an, ziehe von F auf AC, FG senkrecht, und trage von G gegen H den Halbmesser des gegebenen Kreises D.

2°. Ziehe durch H mit AC die gleichlaufende linie HI bis an AE in I, und vereinige I mit D durch die grade linie ID.

3°. Schneide ID aus F mit FH in K, ziehe KF, und durch D mit KF die gleichlaufende linie DL bis an AE in L.

4°. Ziehe von L auf AC die senkrechte linie LM, und beschreibe mit LM aus L den Kreis MNO, so wird derselbe den, zwischen den Schenkeln AB, AC beschriebenen Kreis in N, die Schenkel AB, AC selbsten aber, bey O und M berühren.

Der Grund dieses Verfahrens ist folgender.

Man verlängere IH bis an LM in P, so wird, weil IH mit AC gleichlaufend, und FG, LM senkrecht auf AC gezogen worden, das Dreyeck IFH dem Dreyecke ILP ähnlich, folglich

HF : LP = IF : IL

und wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke IKF, IDL aus eben dem Grunde

KF : DL = IF : IL

folglich

HF : KF = LP : DL.

Es ist aber KF = HF genommen, folglich muß auch LP = LD seyn.

Da IH mit AC gleichläuft, und FG, LM auf AC senkrecht stehen, so ist HGMP ein Rechteck, und HG = PM, folglich PM dem Halbmesser des Kreises D gleich, zieht man daher von L durch D die grade Linie LN, so ist DN = PM, und da auch LD = LP, so folgt LN = LM; demnach geht der aus L mit LM beschriebene Kreis durch N, und berührt folglich den Kreis D in N §. 174.

Wird endlich LO auf AB senkrecht gezogen, so werden die beyden Dreyecke OAL, LAM einander völlig gleich, und LO = LM §. 136, mithin gehet nicht nur der aus L mit LM beschriebene Kreis auch durch O, sondern er berührt überdehm in M und O die Schenkel AB, AC des gegebenen Winkels BAC §. 184, so wie verlangt ist worden.

An=

Anmerkung. Wenn ID auſſer in K noch in irgend einen andern Punkt aus F mit FH geſchnitten werden kann, ſo giebt es auf dieſer Seite zween Kreiſe die der Aufgabe genug thun.

§. 463.

Die Summe zwoer Seiten eines Dreyeckes nebſt der Grundlinie ſind gegeben, und überdehm in der Grundlinie der Punkt beſtimmt, über welchen die Spitze des zubeſchreibenden Dreyeckes zu liegen kommen ſoll; das Dreyeck zu verzeichnen.

Tab. XI. Es ſey s fig. 314 die Summe zwoer Seiten und AB die Grundlinie eines zu beſchreibenden Dreyeckes, in der Grundlinie aber der Punkt C beſtimmt, über welchen die Spitze des Dreyeckes zu liegen kommen ſoll.

1°. Ziehe man AD unter einem beliebigen Winkel an die Grundlinie AB, und nehme AD = s.

2°. Theile AB bey E in zween gleiche Theile, trage BC aus C in F, ziehe ED, und mache den Winkel AFG dem Winkel ADC gleich, indem man FG bis an AD in G ziehet.

3°. Theile AD in H in zween gleiche Theile, und durchſchneide, mit GH aus B, die auf AB in C errichtete ſenkrechte Linie CK in K, ſo wird, wenn man AK, BK ziehet, AKB das geſuchte Dreyeck ſeyn.

Der

Der Grund hiervon ist folgender.

Da die Dreyecke AED, AFG wegen den gleichen Winkeln AFG, ADF, und dem gemeinschaftlichen Winkel CAD ähnlich sind, §. 240, so folgt

$$AD : AE = AF : AG$$

oder da $AD = s$, $AE = \frac{1}{2}(AC + CB)$, und $AF = AC - CB$, so ist auch

$$s : \tfrac{1}{2}(AC + CB) = AC - CB : AG$$

folglich $AG = \frac{\frac{1}{2}(AC + CB).(AC - CB)}{s}$.

Demnach

$$KB = GH = \tfrac{1}{2}s - \frac{\frac{1}{2}(AC + CB)(AC - CB)}{s}$$

und hieraus folgt

$$1°.\ (AC + CB)(AC - CB) = s^2 - 2s.KB.$$

Man beschreibe aus K mit KB einen Kreis, so wird derselben weil $CB = CF$, durch F gehen; verlängert man daher AK bis in L, so ist nach §. 262.

$$AF.AB = AM.AL$$

oder, weil $AM = AK - KM = AK - KB$ und $AL = AK + KL = AK + KB$, so wird

$$2°.\ (AC + CB)(AC - CB) = (AK + KB)(AK - KB)$$

welches mit 1° vergli-chen giebt

$$(AK + KB)(AK - KB) = s^2 - 2s.KB.$$

Hieraus folgt aber

$$AK^2 - KB^2 = s^2 - 2s \cdot KB$$

oder $AK^2 = s^2 - 2s \cdot KB + KB^2$.

Woraus geschlossen wird

$$AK^2 = (s - KB)^2$$

oder $AK = s - KB$, folglich $s = AK + KB$ wie erfordert wird.

Anmerkung. Herr Professor Schwab, welcher diese Aufgabe in seiner Sammlung dreyßig geometrischer Aufgaben nach der geometrisch analytischen Methode aufgelößt hat, fügt zu Ende der Auflösung eine algebraische Formel zur Auflösung eben dieser Aufgabe bey, welche er mit folgender Anmerkung begleitet.

„Hieraus liesse sich auch eine ziemlich „einfache Verzeichnung herleiten, die „aber nicht so zierlich seyn würde als „die, die wir aus der geometrischen „Analysis hergeleitet haben."

Ich muß bekennen daß ich mich sehr gewundert habe zu sehen, daß die Verzeichnung, welche ich gebraucht, und aus der algebraischen Auflösung hergeleitet habe, nicht nur eben so einfach wie diejenige, welche Herr Prof. Schwab gebraucht, sondern sogar eben dieselbe ist. Ja was noch mehr ist, so läßt sich diese Verzeichnung, so wie sie hier ist angegeben worden, unmittelbar aus seiner herausgebrachten

For-

Formel ableiten. Denn die vom Herrn Prof. Schwab gefundene Formel ist x $= \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2c}$, wo x = AK, c = AK + KB, b = CB, a = AC. Nun läßt sich aber diese Formel noch in $x = \frac{1}{2} c + \frac{(a+b)(a-b)}{2c}$ verwandeln, welches giebt

$$AK = \frac{1}{2} AK + \frac{1}{2} KB + \frac{\frac{1}{2}(AC + CB)(AC - CB)}{AK + KB}$$

und hieraus wird leicht geschlossen:

$$KB = \frac{AK + KB}{2} - \frac{\frac{1}{2}(AC + CB)(AC - CB)}{AK + KB}$$

Da nun zufolge der Zeichnung AD = AK + KB, AF = AC — CB und AE = $\frac{1}{2}$(AC + CB) genommen worden, so folgt, weil AD in H in zween gleiche Theile zerfällt ist, $AH = \frac{AK + KB}{2}$

und

$$KB = AH - \frac{AE \cdot AF}{AD} = AH -$$

AG = GH, so wie es die Zeichnung erfordert.

Uebrigens kann ich hier beyläufig bemerken, daß man diese Aufgabe noch etwas zierlicher algebraisch auflösen könnte, wenn man statt KB, oder AK zu suchen,

bloß den halben Unterschied der Seiten AK, KB bestimmte. Denn ist dieser einmal gefunden, so ergeben sich nach einem bekannten arithmetischen Lehrsatze aus der halben Summe, welche gegeben ist, und aus dem gefundenen halben Unterschiede der Seiten AK, KB, diese Seiten selbst. Man nenne daher diesen halben Unterschied Z, so ist $AK = \frac{1}{2}c + Z$ und $KB = \frac{1}{2}c - Z$.

Da nun nach §. 273 $CK^2 = AK^2 - AC^2 = KB^2 - CB^2$, so folgt $(\frac{1}{2}c + Z)^2 - a^2 = (\frac{1}{2}c - Z)^2 - b^2$, oder

$$\frac{1}{4}c^2 + cZ + Z^2 - a^2 = \frac{1}{4}c^2 - cZ + Z^2 - b^2$$

woraus geschlossen wird

$$cZ - a^2 = -cZ - b^2$$

oder $2cZ = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

folglich $Z = \frac{(a+b)(a-b)}{2c}$

Hieraus lässet sich nun eben dieselbe zierliche Zeichnung herleiten, welche in dieser Aufgabe ist angegeben worden.

Es folgt demnach daß man öfters ohne Ursach gegen die algebraische Auflösungskunst schreyet, ohne zu bedenken, daß mehrentheils die Schwierigkeit der Auflösung bloß von der Art abhängt, wie die Rechnung geführet wird. Es ist zwar nicht zu leugnen, daß die geometrische Analysis ihre großen Verdienste

habe,

habe, und daher nicht genugsam den Anfängern angepriesen werden könne, allein man muß auch dabey die algebraische Analysis nicht hintenan setzen, weil es eben so künstlich ist, einen Calkul geschickt zu führen, als eine Aufgabe nach Art der Alten kurz aufzulösen. Werden beyde Arten der Auflösung aber gehörig mit einander verbunden, so gelanget man öfters zu Auflösungen, welche nach einer Art allein kaum möglich aufzulösen wären, und was noch vorzüglicher ist, so hat man die Freyheit, unter zweyen gefundenen Wegen jedesmal den kürzesten zu wählen. Dieses trift sich gerade hier in diesem Falle, wo die algebraische Analysis der geometrischen weit vorzuziehen ist, da diese mehrere Lehrsätze der Meßkunst, jene hingegen nur einen einzigen, und noch dazu einen sehr bekannten zur Auflösung erfordert.

§. 464.

In einen gegebenen Kreis, durch dessen Mittelpunkt eine grade Linie von bestimmter Länge und Lage ist gezogen worden, einen andern Kreis zu beschreiben, welcher den ersten berühre, und durch die Endpunkte gedachter graden Linie gehe.

Tab. XI. Es sey D F G fig. 315 der gegebene Kreis, C sein Mittelpunkt, A B die, in demselben durch den Mittelpunkt C laufende grade Linie, durch dessen Endpunkte A, B ein neuer Kreis beschrieben werden soll, der den gegebenen berühre.

1°. Halbire man die gegebene Linie A B bey E, und beschreibe nach vorigen §. über A C als Grundlinie das Dreyeck A e C, dergestalt: daß die Seiten A e, e C desselben, zusammengenommen, dem Halbmesser C D des gegebenen Kreises gleich werden.

2°. Beschreibe aus e mit A e den Kreis A F B, so wird derselbe durch A und B gehen, und den gegebenen Kreis D F G in F berühren.

Der Grund dieser Zeichnung ist folgender.

Da A B bey E halbirt ist worden, und e E auf A B senkrecht stehen muß, §. 463, so werden, wenn man von e nach B die e B zieht, beyde Dreyecke A e E, e E B einander gleich, §. 136, und A e = e B, woraus klar ist, daß der aus e mit e A beschriebene Kreis auch durch B gehen muß. Da nun überdehm, wenn man C bis in F verlängert, A e + c C = C D = C F = F e + e C wird, so folgt: es müsse auch A e = F e seyn, und folglich der aus e mit F e beschriebene Kreis durch F gehen, und den gegebenen D F G daselbst berühren §. 173.

§. 465.

In einen gegebenen Viertheil eines Kreises einen Kreis einzuschreiben, der

den

den Bogen und die Halbmesser des gegebenen Viertheils berühre.

Es sey ABC fig. 316 der gegebene vierte Tab. XI. Theil eines Kreises in welchen ein Kreis eingeschrieben werden soll.

1°. Theile man den rechten Winkel ACB durch die grade linie CD in zween gleiche Theile nach §. 380, und eben so halbire man einen der beyden Winkel ACD oder DCB wie hier ACD durch die grade linie CE.

2°. Ziehe durch D mit EC die gleichlaufende linie DF bis an BC nach §. 386.

3°. Setze bey F an DF nach §. 385 einen Winkel DFG gleich dem Winkel FDG, und beschreibe aus G mit GF den Kreis DFH, so wird derselbe den Bogen AB in D, die Halbmesser AC, BC aber in H und F berühren.

Der Grund hiervon ist folgender.

Weil DCE der vierte Theil eines rechten Winkels ist, so muß auch, weil DF mit EC gleichläuft, FDG der vierte Theil eines rechten Winkels seyn §. 119; da nun DFG = FDG gemacht ist worden, so ist auch DFG der vierte Theil eines rechten Winkels.

Weil DF mit EC gleichläuft, so ist auch DFB = ECB §. 119, folglich DFB drey Viertheile eines rechten Winkels, mithin GFB = GFD + DFB gleich einem rechten Winkel, mithin GF auf BC senkrecht; demnach berühret der Kreis den Halbmesser BC in F, §. 184. Da DFG = FDG, so ist das Dreyeck DGF

gleichschenklicht, §. 139, folglich DG = GF, mithin gehet der aus G mit GF beschriebene Kreis auch durch D, und berühret den Bogen AB in D, nach §. 173.

Endlich ziehe man GH auf AC senkrecht, so wird das Dreyeck GCH dem Dreyecke GCF gleich, und GH = GF §. 119, folglich gehet der aus G mit GF beschriebene Kreis durch H, und berühret AC in H §. 184, welches zu erweisen war.

§. 466.

Durch den Punkt in welchem sich zween gegebene Kreise schneiden, eine grade Linie von bestimmter Länge zu ziehen, die dem Umfang eines jeden Kreises wiederum begegne.

Tab.XI. Es seyn CFH, CGH fig. 317 die gegebenen Kreise deren Mittelpunkte A und B, ferner sey a die grade Linie von bestimmter Länge, und C, H die Punkte, wo sich die beyden gegebenen Kreise schneiden, und durch welche Linien gezogen werden sollen, die der gegebenen a gleich seyn.

1°. Beschreibe man aus B, einem der Mittelpunkte beyder gegebenen Kreise, mit der Helfte der gegebenen Linie a einen Kreisbogen DEK.

2°. Ziehe von A, dem andern Mittelpunkte, an den beschriebenen Bogen eine Berüh-

rührungslinie AF, nach §. 393, und E sey der Berührungspunkt.

3°. Ziehe von E nach B die grade linie EB, durch C aber mit EB die gleichlaufende Linie FG, welche den Umfang der Kreise in F und G schneidet, so ist FG = a, folglich geschehen was verlangt ist worden.

Der Grund dieses Verfahrens ist folgender.

Da CF eine Sehne des Kreises A, und CG eine Sehne des Kreises B ist, so treffe die Berührungslinie AE verlängert CF in L; da nun überdehm AE auf BE senkrecht stehen muß, §. 184, nach der Zeichnung aber FG mit BE gleichlaufend gezogen worden, so stehet auch AL auf FG senkrecht, und halbirt die Sehne CF in I §. 164. Zieht man nun aus B auf FG die senkrechte linie BM, so halbiret diese CG aus eben dem Grunde in M, und es wird LM = BE, folglich LM = $\frac{1}{2}$ a. Es ist aber LM = LC + CM oder $\frac{1}{2}$ a = LC + CM, folglich a = 2LC + 2CM = FC + CG = FG welches zu erweisen war.

Anmerkung. Ist die Helfte der gegebenen linie größer als die Entfernung der Mittelpunkte der beyden gegebenen Kreise, so ist die Aufgabe unmöglich, und es läßt sich durch C nicht auf die verlangte Weise eine grade linie wie FG legen, welche der gegebenen gleich wäre. Uebrigens ist für sich klar daß auf eben die Art wie durch C

auch durch H eine dergleichen Linie gelegt werden könne.

§. 467.

Durch die Endpunkte einer, der Lage nach, gegebenen graden Linie einen Kreis zu beschreiben, der eine andere, der Lage nach, gegebenen graden Linie berühre.

Tab. XI. Es sey AB fig. 318 die, der Lage nach, gegebenen graden Linie, durch dessen Endpunkte A und B der zu beschreibende Kreis gehen soll, und CD eine andere, der Lage nach, gegebenen grade Linie, welche der durch A und B beschriebene Kreis berühren soll.

1°. Theile man AB in E in zween gleiche Theile durch die senkrechte Linie CE, und verlängere CE, CD bis sie sich in C schneiden.

2°. Ziehe von C nach B die grade Linie CB, fälle von E auf CD die grade Linie EF senkrecht, und schneide aus eben dem Punkte mit EF die verlängerte CB in G.

3°. Durch B ziehe man BH mit EG gleichlaufend, und durch H, wo BH die grade Linie EC schneidet, die grade Linie HI mit EF gleichlaufend; so wird der aus H mit HI beschriebene Kreis durch A und B gehen, und CD in I berühren.

Der Grund dieser Zeichnung ist folgender. Da EG mit HB gleichläuft, so ist EG : HB = CE : CH §. 244, und aus eben dem

Grunde EF : HI = CE : CH, folglich EG : HB = EF : HI. Nun ist nach der Zeichnung EG = EF, folglich auch HB = HI; ferner ist HA = HB, mithin muß der mit HI beschriebene Kreis durch A, und B gehen, und die grade Linie CD in I berühren, da HI auf CD in I senkrecht stehet.

§. 468.

Wenn in dem Umfang eines Kreises zween Punkte bestimmt werden, in den gegebenen Kreis einen Durchmesser dergestalt zu ziehen, daß, wenn man von den gegebenen Punkten im Umfange, auf den gezogenen Durchmesser des Kreises, senkrechte Linien zieht, der zwischen den Endpunkten liegende Abschnitt gleich einer gegebenen graden Linie sey.

Es seyn A, B zween bestimmte Punkte im Umfange des aus C fig. 319 beschriebenen Kreises, und a die gegebene grade Linie, an welcher der Abschnitt des zu ziehenden Durchmessers gleich werden soll. Tab. XI.

1°. Vereinige man die bestimmte Punkte A, B durch die grade Linie AB, und beschreibe aus A mit der gegebenen Linie a einen Kreisbogen b c.

2°. Ziehe von B, nach §. 393, an den Kreisbogen b c eine Berührungslinie BD, fälle von C, dem Mittelpunkte des gegebenen Krei-

Kreises, auf die verlängerte BD eine senkrechte Linie CE, und verlängere CE bis sie dem Umfang auf beyden Seiten in F und G begegne, fälle endlich von A auf FG die senkrechte Linie AH, so wird HE = AD = a wie verlangt ist worden.

Der Grund hiervon ist folgender.

Da aus A der Kreisbogen bc mit der gegebenen graden Linie a ist beschrieben worden, so ist AD = a, und da FG auf BE senkrecht gezogen ist, so ist ADEH ein Rechteck, folglich HE = AD = a; demnach geschehen was verlangt worden.

Anmerkung. Da von B an bc zwo Berührungslinien gezogen werden können, so giebt es auch zwey Halbmesser die der Aufgabe Genüge leisten; übrigens ist klar, daß die gegebene grade Linie a nicht grösser seyn dürfe als die Entfernung AB der zween gegebenen Punkte A und B. Ist aber a = AB, so ist der zu ziehende Durchmesser mit AB selbsten gleichlaufend.

§. 469.

Auf dem Umfang eines Kreises werden drey Punkte gegeben, einen Punkt in dem gegebenen Kreis zu finden, so daß die, von den dreyen Punkten dahin gezogene grade Linien zween gegebene Winkel einschließen.

Es seyn A, B, C fig. 320 die drey Punkte auf dem Umfang des Kreises, dessen Mittelpunkt D, und a, b die zwey gegebene Winkel. Tab. XI.

1°. Ziehe man die Punkte A, B mit AB, und die Punkte B, C mit BC zusammen.

2°. Beschreibe über AB nach §. 394 einen Kreisabschnitt AEB welcher einen Winkel AEB enthalte, der dem gegebenen a gleich sey. Eben so beschreibe man über BC den Kreisabschnitt BEC, welcher den Winkel BEC enthalte, der dem andern gegebenen Winkel b gleich sey.

3°. Ziehe von E, wo sich die beyden über AB, BC beschriebene Kreisabschnitte schneiden, nach A, B, und C die graden Linien EA, EB, EC, so ist geschehen was verlangt worden.

Der Grund dieser Zeichnung ist für sich klar.

Anmerkung. Diese wenige Zeichnungen zur Uebung können hinreichen, um sich einigermaßen einen Begrif zu machen, wie weit man schon mit den ersten Grundsätzen der Meßkunst reichen könne. Es bleiben jetzt noch verschiedene wichtige Zeichnungen zurück, welche zum Theil ganz neu sind, die ich aber aus Mangel des Raums, und weil mehrere darunter Kenntnisse der Dreyeck-Meßkunst (Trigonometrie) vorausetzen, so lange aufheben muß, bis ich sie in die Hefte so ich künftig über die Dreyeck-Meßkunst her-

aus-

auszugeben gedenke, werde bekannt machen können.

Berechnungen der Meßkunst.

§. 470.

Die Berechnungen der Meßkunst kommen theils bey den Flächen, theils bey den Körpern vor, deren Figuren sich nach Gründen der niedern Meßkunst bestimmen lassen. Um aber sowohl Flächen als Körper auszumessen, müssen Größen von eben der Art zum Maaßstabe angenommen werden; so müssen Flächen durch Flächen, und Körper durch Körper ausgemessen werden. Die Ausmessung der Flächen geschiehet nun mittelst eines ordentlichen Viereckes, welches zur Einheit angenommen wird, und dessen Seite so lang ist, als das Maaß, welches man bey Ausmessung der in der vorgegebenen Figur zu messenden Linien gebrauchen will. Ob nun gleich das Maaß, so man zur Ausmessung grader Linien gebrauchen will, an und für sich willkührlich ist, so ist doch solches gemeiniglich durch Landes-Gesetze bestimmt. Eben so kann auch die Eintheilung des Längenmaßen willkührlich geschehen, ob schon es ebenermaßen durch den Gebrauch meistentheils bestimmt ist. Aus dem hier gesagten ist schon klar, daß weder die Größe noch die Eintheilung des Maaßes in allen Ländern und bey allen Völkern gleich seyn könne; auch findet sich in der That eine große Verschiedenheit in dieser Absicht. Will man

daher

daher fremdes und unbekanntes Maaß, oder Bestimmungen, so in solchem Maaße gemacht sind worden, gehörig gebrauchen, so muß man zuförderst das Verhältniß des unbekannten Maaßes zum bekannten und landesüblichen zu erforschen suchen; denn sobald dieses Verhältniß bekannt ist, kann man leicht jedes gegebene fremde Maaß, von welchem dies Verhältniß bestimmt ist worden, auf das bekannte Maaß bringen. So verschieden die Maaße aber sowohl in ihrer Länge als in ihren Eintheilungen in verschiedenen Ländern sind, eben so verschieden ist auch zum Theil die Benennung desselben, indessen sind doch die Benennungen eines Fusses, Zolles, Linie die allgemeinsten, indem die Benennungen der Ruthen, Klafter, Lachter, schon weniger allgemein sind.

§. 471.

Es ist fast durchgängig eingeführt zum Maasse einer graden Linie die Länge des Fußes eines erwachsenen Menschen anzunehmen, davon auch dieses Maaß den Namen eines **Fußes** erhalten hat. Zehen Fuß zusammgenommen machen eine **Ruthe**; der zehnte Theil eines Fußes heisset einen **Zoll**; der zehnte Theil eines Zolles eine **Linie**, und der zehnte Theil einer Linie ein **Scrupel**. Diese Eintheilung ist bey den Meßkünstlern gebräuchlich, da nach derselben die kleinern Theile des Maaßes sich durch zehentheilige Brüche ausdrücken lassen, welches die Rechnungen, so man öfters mit dergleichen Zah-

Zahlen zu machen hat, ausserordentlich erleichtert. Im gemeinem leben ist es hingegen mehr gewöhnlich den Fuß in 12 Zolle den Zoll in 12 Linien, und die Linie in 12 Scrupel einzutheilen, sodann machen auch gewöhnlich 12 Fuß eine Ruthe, welche Eintheilung gemeiniglich das zwölftheilige Maaß genennet zu werden pfleget, insgemein aber hier zu lande Rheinländisches Maaß heißet.

Aus beyden Arten der Eintheilung kann man nun folgendes schließen.

Eine zehentheilige Ruthe hat 10 Fuß, 100 Zoll, 1000 Linien, 10000 Scrupel.

Ein zehentheiliger Fuß hat 10 Zoll, 100 Linien, 1000 Scrupel.

Ein zehentheiliger Zoll hat 10 Linien oder 100 Scrupel.

Eine zwölftheilige Ruthe hat 12 Fuß, 144 Zoll, 1728 Linien, 20736 Scrupel.

Ein zwölftheiliger Fuß hat 12 Zoll, 144 Linien, 1728 Scrupel.

Ein zwölftheiliger Zoll hat 12 Linien, 144 Scrupel.

Es ist fast immer üblich daß man die Ruthen nach beyden Eintheilungen von gleicher Länge macht, ob es schon auch zuweilen bey den Fußen zu geschehen pfleget. Ist nun das erste, und man frägt: wie viel betragen 7 Fuß 8 Zoll 3 Linien zehentheiliges Maaß in zwölftheiliges? so schließe man:

wie 1000 Linien der zehentheiligen Ruthe sich

zu 7 Fuß 8 Zoll 3 linien der zehentheiligen Ruthe verhalten, eben so verhalten sich 1728 linien der zwölftheiligen Ruthe, zur gesuchten Anzahl der linien der zwölftheiligen Ruthe welche den gegebenen 7 Fuß 8 Zoll 3 linien zehentheiligen Maaßes gleich sind, oder

1000 : 783 = 1728 : gesuchten Zahl,

welche folglich = $\frac{783 \cdot 1728}{1000}$ = 1353 linien der zwölftheiligen Ruthe, oder, indem man diese Zahl der linien nach und nach durch 12 theilet, und dieselbe dadurch in Zolle und Fuße verwandelt, 9 Fuß, 4 Zoll, 9 linien, nach zwölftheiligem Maaße.

Wird hingegen umgekehrt gefragt: wie viel betragen 11 Fuß, 7 Zoll, 5 linien, zwölftheiliges Maaß in zehentheiliges? vorausgesetzt die Ruthe sey in beyden Eintheilungen von gleicher länge, so schließe man

1728 : 11 Fuß, 7 Zoll, 5 linien =

1000 : zur gesuchten Zahl, da nun 11 Fuß, 7 Zoll, 5 linien, zwölftheiliges Maaß 1673 linien betragen, so ist die gesuchte Zahl = $\frac{1673 \cdot 1000}{1728}$ = 968 linien zehentheiliges Maaß.

Oder 9 Fuß, 6 Zoll, 8 linien, zehentheiliges Maaß, betragen die gegebene 11 Fuß, 7 Zoll, 5 linien, zwölftheiliges.

Es ist klar, daß, wenn auser den Füßen, Zollen und linien noch Ruthen gegeben wären, diese nicht verwandelt werden dürften, da, zufolge

der Vorausſetzung, die Ruthe nach beyden Eintheilungen gleiche Länge haben ſoll; man würde in dieſem Falle demnach nur die Fuße, Zolle, und Linien zu verwandeln haben.

Es iſt auch leichte hieraus einzuſehen, wie verfahren werden müſſe, im Fall die Fuße nach beyden Arten der Eintheilung von gleicher Länge ſind, und eine gewiſſe Anzahl Ruthen, Fuße und Zolle von der einen Eintheilung auf die andern gebracht werden müßte.

In Abſicht der Bezeichnung bedienet man ſich bey den Ruthen einer o; bey den Fußen eines Striches; bey den Zollen zweyer Striche; bey den Linien dreyer Striche; und endlich bey den Scrupeln vierer Striche, dergeſtalt: daß $141^{\circ}\ 9'.7''.8'''.3^{IV}$ eben ſo viel bedeutet, als 141 Ruthen, 9 Fuß, 7 Zoll, 8 Linien, und 3 Scrupel.

Nur muß man ſich hüten, dieſe Bezeichnung nicht mit der gleichen Bezeichnung zu verwechſeln, wodurch man die Grade, Minuten, Secunden u. ſ. w. eines Bogens anzudeuten pfleget, weil nach dieſer Art die Größen zu bezeichnen auch leicht 141 Grade, 9 Minuten, 7 Secunden, 8 Tertien, 3 Quarten für den letzten Ausdruck geleſen werden könnten, welches doch keinesweges der Sinn deſſelben ſeyn würde. Indeſſen muß man auch bekennen, das ſich ſchwerlich der Fall gedenken läßt, wo hierüber eine Zweydeutigkeit entſtehen könnte, da man

immer weiß, ob die gegebene Zahl grade Linien, Bögen oder Winkel vorstellen soll.

§. 472.

Ich werde hier nicht zeigen wie mittelst eines gehörig eingetheilten Maaßes grade Linien auf dem Papiere und Felde gemessen werden können; da ich künftig ein eigenes Heft herauszugeben gedenke, oder es doch wenigstens als einen Anhang dem Hefte über die **Dreyeck-Meßkunst**, welches sogleich nach diesem Hefte über die **Meßkunst** ans Licht treten soll, beyfügen werde, worinnen die **Anwendung der Meßkunst auf die Feldmeßkunst** insbesondere soll abgehandelt werden, bis dahin werde ich auch die Aufnehmung und Auftragung der Winkel auf das Papier zu lehren versparen, und hier nur bloß die Ausrechnung der Flächen und Körper durchgehen, dabey aber annehmen: man wisse auf jede vorgegebene Fläche oder auf jeden vorgegebenen Körper die zur Berechnung nöthigen graden Linien gehörig auszumessen. Ich habe schon oben erinnert, daß zur Ausmessung der Flächen eine andere Fläche gebraucht werden muß, und daß es zum schicklichsten sey, dazu ein ordentliches Viereck zu gebrauchen, dessen Seite eines, von den, zur Ausmessung der bey derselben vorkommenden graden Linien, gebrauchten längenmaaßes habe; dergestalt, daß wenn ein Fuß zur Ausmessung der bey einer Fläche vorkommenden graden Linien gebraucht ist worden, zur Ausmessung der Fläche

selbst ein ordentliches Viereck gebrauchet werde, bey welchem jede Seite einen Fuß lang, und das daher ein Flächen=Fuß genennt werden kann; eben so müßte man, wenn die Linien bey einer Fläche mittelst einer Ruthe ausgemessen worden wären, zum Maaß der Fläche ein ordentliches Viereck annehmen, dessen Seite eine Ruthe lang, und daher sehr gut eine Flächen=Ruthe heißen könnte, und so ist dieses auch von den übrigen Benennungen zu verstehen.

§. 473.

Ist demnach die Ruthe, der Fuß, der Zoll u. s. w. in zehen gleiche Theile zerfället worden, so lassen sich hieraus leicht folgende Sätze schließen.

Eine Flächen=Ruthe hat 100 Flächenfuß, 10000 Flächenzolle, 1000000 Flächenlinien, 100000000 Flächenscrupel (§ 642. 643).

Ein Flächenfuß hat 100 Flächenzolle, 10000 Flächenlinien, 1000000 Flächenscrupel.

Ein Flächenzoll hat 100 Flächenlinien, 10000 Flächenscrupel.

Eine Flächenlinie hat 100 Flächenscrupel.

Hat man hingegen die Ruthe, den Fuß, den Zoll u. s. w. in zwölf gleiche Theile eingetheilet, so kann man sagen.

Eine Flächenruthe hat 144 Flächenfuß, 20736 Flächenzolle, 2985984 Flächenlinien, 429981696 Flächenscrupel.

Ein

Ein Flächenfuß hat 144 Flächenzolle, 20736 Flächenlinien, 2985984 Flächenscrupel.

Ein Flächenzoll hat 144 Flächenlinien, oder 20736 Flächenscrupel.

Eine Flächenlinie hat 144 Flächenscrupel.

Hieraus ist nun leicht die Art und Weise zu beurtheilen wie das zehentheilige Flächenmaaß auf zwölftheiliges, und dieses hinwiederum auf jenes gebracht werden könne, wenn nur das, was oben von Verwandlung des Längenmaßes ist gesagt worden, gehörig in Betrachtung gezogen wird.

Eine Fläche berechnen heißet nun nichts weiter: als aus einigen auf der Fläche gemessenen und in Zahlen ausgedrückten linien, eine Zahl finden, welche die Flächenruthen, Flächenfuße, Flächenzolle, Flächenlinien oder Flächenscrupel angebe, so in der zu messenden Fläche enthalten sind.

Nachdem ich diesen Begrif festgesetzet habe, so wollen wir zu den Berechnungen der Flächen selbsten übergehn.

Berechnungen der Dreyecke.

§. 474.

Den Flächenraum eines gegebenen Dreyeckes zu finden.

Es sey die Grundlinie eines Dreyeckes = g; dessen Höhe = h, sein Flächenraum = f, so ist (§. 648).

$$f = \frac{1}{2} g . h.$$

oder der Flächenraum eines Dreyeckes wird gefunden, wenn dessen Grundlinie mit seiner Höhe vervielfältiget, und von dem gefundenen Producte die Helfte genommen wird.

I. Beyspiel. Es sey g = 728°. 7'. 3'', h = 24°. 3'. 6'' zehentheiliges Maaß, so kann g = 728, 73 Ruthen, und h = 24, 36 Ruthen gesetzet werden, und dies giebt

$$f = \frac{728,73 \cdot 24,36}{2} = 728,73 \cdot 12,$$

18 = 8875, 9314, folglich der gesuchte Flächenraum des Dreyeckes 8875 Flächenruthen, 93 Flächenfuß, und 14 Flächenzolle.

Anmerkung. Wäre g = 728'. 7''. 3'''; h = 24'. 3''. 6''' zehentheiliges Maaß, so würde g = 728, 73 Fuß, und h = 24, 36 Fuß seyn, und man würde eben so f = 8875, 9314 Flächenfuß, oder 8875 Flächenfuß, 93 Flächenzolle, und 14 Flächenlinien finden, wobey zu merken, daß 8875 Flächenfuß, 88 Flächenruthen, und 75 Flächenfuß betragen.

II. Beyspiel. Es sey g = 291°. 5'. 11'', h = 21°. 3'. 7'' zwölftheiliges Maaß, so verwandele man zuförderst die Fuße, Zoll u. s. w, so hinter den Ruthen folgen, in zehentheiligen Brüchen, indem man die Fuße durch 12, die Zolle durch 144, und so weiter theilet. Da nun $\frac{5}{12}$ = 0, 416666, und $\frac{11}{144}$ = 0, 076389 gefunden werden, so ist g = 291°, 493055,

493055, und auf eben die Art h = 21°, 298611, folglich

f = $\frac{1}{2}$. 291°, 493055 . 21, 298611

= 3104, 198594 Flächenruthen, oder 3104 Flächenruthen, 28 Flächenfuß, 86 Flächenzoll, indem man nach und nach den zehentheiligen Bruch 0, 198594, so nach den 3104 ganzen Flächenruhen folget, mit 144 vervielfältiget.

Wäre hingegen g = 291′ . 5″ . 11‴, und h = 21′ . 3″ . 7‴ zwölftheiligen Maaßes, folglich g = 291′, 493055, h = 21′, 298611, so würde f = 3104, 198594 Flächenfuß oder 3104 Flächenfuß, 28 Flächenzoll, 86 Flächenlinien seyn. Woraus leicht eingesehen werden kann, welchen Werth die durch vorige Berechnung gefundene Zahl haben würde, wenn das Maaß der graden linien in Zolle, Linien oder Scrupel angegeben wäre. Denn es bleibt immer der Satz unverändert, daß das Flächenmaaß eben die Benennung erhalte, welche das gebrauchte Längenmaaß hat.

§. 475.

Ist hingegen der Flächenraum, nebst der Grundlinie eines Dreyeckes bekannt, so kann man leicht dessen Höhe berechnen, denn es ist

$$h = \frac{2f}{g}$$

oder der doppelte Flächenraum eines Dreyeckes, durch dessen Grundlinie getheilet, giebt die Höhe des Dreyeckes.

I. Beyspiel. Es sey in zehentheiligen Maaße f = 127 Flächenruthen, 32 Flächenfuß, und 57 Flächenzolle = 127, 3257 Flächenruthen, und g = 37 Ruthen, 7 Fuß, 5 Zoll, = 37, 75 Ruthen, so ist

$$h = \frac{2 . 127,3257}{37,75} = \frac{254,6514}{37,75} = 6,745$$

oder die gesuchte Höhe des Dreyeckes ist 6 Ruthen, 7 Fuß, 4 Zoll, 5 linien, zehentheiliges Maaß.

II. Beyspiel. Es sey in zwölftheiligem Maaße f = 213 Flächenruthen, 67 Flächenfuß, 37 Flächenzolle, g = 31 Ruthen, 9 Fuß, 3 Zoll, so bringe man zuförderst die Flächenfuß und Flächenzolle auf zehentheilige Brüche der Flächenruthe, indem man die Flächenfuße durch 144, die Flächenzolle hingegen durch 20736 theilet, so wird f = 213, 467062 Flächenruthen, und g = 31, 770833 Ruthen, und hieraus folgt

$$h = \frac{2 . 213,467062}{31,770833} = \frac{426,934124}{31,770833} =$$

13, 438.

oder indem man hier den zehentheiligen Bruch nach und nach mit 12 vervielfältiget, h = 13 Ruthen, 5 Fuß, 3 Zoll, zwölftheiliges Maaß.

§. 476.

Ist endlich der Flächenraum eines Dreyeckes nebst der Höhe bekannt, so findet sich die Grundlinie

$$g = \frac{2f}{h}$$

oder der doppelte Flächenraum eines Dreyeckes, durch dessen Höhe getheilt, giebt seine Grundlinie.

Beyspiele für diesen Fall sind hier unnöthig, da die Berechnung von der im vorigen §. nicht verschieden ist.

Berechnungen der Vierecke.

§. 477.

Es sey ein gleichgestrecktes Viereck oder Rechteck zu berechnen, dessen Grundlinie G, dessen Höhe H, und dessen Flächenraum F, so ist dieser Flächenraum (§. 646)

$$F = G \cdot H.$$

oder der Flächenraum eines gleichgestreckten Viereckes oder Rechteckes wird gefunden, wenn man dessen Grundlinie mit seiner Höhe vervielfältiget.

Ist aber der Flächenraum nebst der Grundlinie eines Rechteckes bekannt, so findet sich dessen Höhe

$$H = \frac{F}{G}$$

oder die Höhe eines gleichgestreckten Viereckes oder Rechteckes wird erhalten, wenn dessen Flächenraum durch die Grundlinie desselben getheilet wird.

Ist endlich der Flächenraum, nebst der Höhe bekannt, so findet sich die Grundlinie

$$G = \frac{F}{H}$$

oder die Grundlinie eines gleichgestreckten Viereckes oder Rechteckes wird gefunden, wenn der Flächenraum desselben, durch seine Höhe getheilet wird.

Anmerkung. Ich halte es für überflüßig von diesen Berechnungen Beyspiele zu geben, da die, bey den Dreyecken gegebene Beyspiele, hier unmittelbar zur Vorschrift dienen können.

§. 478.

Tab. XI. **Es sey ein Viereck *ABCD fig.* 321 zu berechnen, bey welchem zwo gegenüberstehende Seiten *AD*, *BC* gleichlaufen.**

Man ziehe die Querlinie AC dieses Viereckes, so wird dasselbe in die zween Dreyecke ADC, ABC zerfällt; nimmt man nun die beyden gegenüberstehenden Seiten AD, BC für die Grundlinien an, so erhalten beyde Dreyecke gleiche Höhe. Es sey demnach $AD = g$, $BC = G$,

= G, die gemeinschaftliche Höhe = h, der Flächenraum des Viereckes ABCD = f, so ist (§. 650)

$$f = h \cdot \frac{G + g}{2}$$

oder der Flächenraum eines Viereckes, welches zwo gleichlaufende Seiten hat, wird gefunden, wenn man die halbe Summe der gleichlaufenden Seiten mit der Entfernung dieser Seiten vervielfältiget.

Beyspiel. Es sey $G = 625' . 9'' . 8''' . g = 123' . 7'' . 5'''$, $h = 22' . 3'' . 1'''$, so ist

$$f = 22',31 \left(\frac{615',98 + 123',75}{2}\right) = 22',31 . 369',865 = 8251',6881,$$

oder f = 82 Flächenruthen, 51 Flächenfuß, 68 Flächenzoll, und 81 Flächenlinien.

Aus der Formel $f = h \cdot \frac{G + g}{2}$, folgt ferner

$$h = \frac{2f}{G + g}, \quad G = \frac{2f}{h} - g,$$

und endlich $g = \frac{2f}{h} - G$.

welche Ausdrücke leichte zu begreifen sind.

§. 479.

Ein jedes gegebene Viereck zu berechnen.

Tab. XI. Es sey ABCD fig. 322 das gegebene Viereck.

Man ziehe die Querlinie BD des gegebenen Viereckes, und mache dieselbe zur gemeinschaftlichen Grundlinie der Dreyecke ABD, BCD, worinnen das Viereck ABCD zerfället worden, indem man von A und C die graden linien AE, CF auf BD senkrecht ziehet, und diese linien für die Höhen annimmt. Setzt man daher BD = g, AE = H, CF = h, und den Flächenraum des Viereckes f, so ist (§. 649)

$$f = g \cdot \frac{H + h}{2}$$

oder der Flächenraum eines Viereckes wird gefunden, wenn man eine beliebige Querlinie desselben, mit der halben Summe der Entfernungen der beyden andern Ecken, von der Querlinie, vervielfältiget.

Aus $f = g \cdot \frac{H + h}{2}$ ergiebt sich ferner

$$g = \frac{2f}{H + h}, \quad H = \frac{2f}{g} - h; \quad h = \frac{2f}{g} - H.$$

woraus sich immer von den vier Größen f, g, h, H eine bestimmen läßt, wenn drey derselben bekannt sind.

Berechnungen so bey Vielecken vorfallen.

§. 480.

Den Flächenraum eines jeden gegebenen Vieleckes zu finden.

Es sey ABCDEF fig. 323 ein unordentliches Sechseck welches berechnet werden soll. Tab. XI.

Man ziehe die Querlinien AE, BE, BD, und fälle auf dieselbe von F, A, E und C die senkrechten Linien Ff, Aa, Ee, Cc, so findet sich nach §. 474 der Flächenraum der Dreyecke FAE, ABE mittelst AE, Ff, und BE, Aa, nach vorigem §. aber der Flächenraum des Viereckes BCDE mittelst BD, Ee, Cc.

Werden daher die Flächenräume der Dreyecke FAE, ABE, zu dem Flächenraum des Viereckes BCDE hinzugerechnet, so ergiebt sich der Flächenraum des unordentlichen Sechseckes ABCDEF.

Auf eben die Art muß verfahren werden, wenn eine Figur mehr Seiten hat, und daher in noch mehrere Dreyecke, und Vierecke aufgelöset werden kann.

§. 481.

Den Flächenraum eines ordentlichen Vieleckes zu finden.

Es

Es sey die Länge einer Seite = s, der Abstand der Seiten vom Mittelpunkte der Figur = a, die Anzahl der Seiten = n, so ist der Umkreis der ordentlichen Figur = n . s, wird aber der Flächenraum f gesetzt, so ist (§. 652)

$$f = \frac{n \cdot a \cdot s}{2}$$

oder der Flächenraum eines ordentlichen Vieleckes wird gefunden, wenn man die gegebene Seite mit ihrem Abstande vom Mittelpunkte vervielfältiget, das gefundene Product aber von neuem mit der halben Anzahl der Seiten vervielfältiget.

Beyspiel. Es sey ein ordentliches Zeheneck zu berechnen, dessen Seite s = 618 Fuß, und dessen Abstand der Seiten a = 951 Fuß, so ist

$$f = \frac{10 \cdot 951 \cdot 618}{2} = 5 \cdot 951 \cdot 618 =$$

2938590 Flächenfuß.

Aus $f = \frac{n \cdot a \cdot s}{2}$ folgt unmittelbar

$$a = \frac{2f}{n \cdot s}; s = \frac{2f}{n \cdot a}; n = \frac{2f}{a \cdot s}.$$

§. 482.

Aus zwoen gegebenen Seiten eines rechtwinklichten Dreyeckes die dritte Seite zu finden (§. 656).

Es sey ABC fig. 324 das gegebene Drey- Tab. XI.
eck, die eine grade Seite AB desselben = a, die andere BC = b, die schiefe Seite AC = c, so ist.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

oder die schiefe Seite eines rechtwinklichten Dreyeckes wird gefunden, wenn man aus der Summe der Quadrate der beyden graden Seiten die Quadrat-Wurzel ziehet.

Beyspiel. Es sey a = 12, b = 16, so ist

$$c = \sqrt{12 \cdot 12 + 16 \cdot 16} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20.$$

Aus der Gleichung $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, folgt ferner

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}, \text{ und } b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

oder eine jede der graden Seiten eines rechtwinklichten Dreyeckes wird gefunden, wenn man die Quadrat-Wurzel aus dem Unterschiede der Quadrate der schiefen Seite, und der andern graden Seite ziehet.

§. 483.

Aus dem Halbmesser eines Kreises, und der Seite eines ordentlichen im Kreise eingeschriebenen Vieleckes, die Seite eines andern ordentlichen Vieleckes zu finden,

finden, welches sich in eben den Kreis einschreiben läßt, und doppelt so viel Seiten als das gegebene hat.

ab I. IX. Es sey A B C D E F fig. 325 ein ordentliches im Kreise eingeschriebene Sechseck, man soll die Seite B G eines ordentlichen Zwölfecks finden, welches sich in eben den Kreis einschreiben läßt.

Man setze den Halbmesser B H des Kreises = r die Seite B C des Sechseckes = s, so ist $BI = \frac{1}{2}s$, folglich nach vorigen §. $IH = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)}$, mithin $GI = r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}$, folglich da nach vorigen §. $BG^2 = GI^2 + BI^2$, so wird gefunden

$$BG^2 = r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2} + r^2 - \tfrac{1}{4}s^2 + \tfrac{1}{4}s^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2}$$

oder indem die Seite des Zwölfeckes $= \sigma$ gesetzet wird.

$$\sigma = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2}} = \sqrt{2r(r - \sqrt{(r + \tfrac{1}{2}s)(r - \tfrac{1}{2}s)})}$$

oder wenn r = 1 gesetzet wird

$$\sigma = \sqrt{2(1 - \sqrt{(1 + \tfrac{1}{2}s)(1 - \tfrac{1}{2}s)})}$$

oder die Seite des ordentlichen Zwölfeckes wird gefunden, wenn man die Seite des ordentlichen Sechseckes halbirt, diese Helfte zum Halbmesser sowohl hinzusetzet als davon abzieht, die Summe mit dem Unterschiede vervielfältiget, daraus die Quadrat-Wurzel zieht, diese gefundene Wurzel vom Halbmesser des Kreises weg-

wegnimmt, den Rest mit 2 vervielfältiget, und aus dem Produkte von neuem die Quadrat-Wurzel zieht.

Beyspiel. Da beym ordentlichen Sechseck die Seite dem Halbmesser des Kreises gleich ist, worinnen das ordentliche Sechseck ist eingeschrieben worden, so ist in dem Falle wo r = 1, auch s = 1, und hiermit ergiebt sich die Seite des ordentlichen Zwölfeckes

$$\sigma = \sqrt{2(1-\sqrt{(1+\frac{1}{2})}.(1-\frac{1}{2})} = \sqrt{2(1-\sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{1}{2})} = \sqrt{2-\sqrt{3}} = 0,517638090.$$

Setzt man diesen Werth für s in die obige Gleichung, so ergiebt sich auf eben die Art σ für das Vier und Zwanzig-Eck = 0,261052384, und wenn dieser Werth für s gesetzt wird, erhält man eben so die Seite σ für das Acht und Vierzig-Eck = 0,130806258, und so kann man weiter gehen, woraus sich die Seite des Sechs und Neunzig-Eckes = 0,065438166 findet.

Berechnungen so bey Kreisen und Kreisförmigen Figuren vorfallen.

§. 484.

Einen sehr kleinen Kreis-Abschnitt ohne beträchtlichen Fehler zu berechnen.

Tab. XI. Es sey BGCIG fig. 325 der gegebene Kreisabschnitt.

Man theile die Sehne BC = s des Kreisabschnittes in zween gleiche Theile, und errichte in dem Theilungspunkt I auf die Sehne eine senkrechte Linie I G = v, bis sie dem Kreisbogen in G begegnet, so ist ohne merkliche Fehler die Fläche f des gegebenen Kreisabschnittes (§. 661).

$$f = \frac{2}{3} v . s.$$

Ist nun der Halbmesser des Kreises = r, so wird $v = r - IH$, und da $IH = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2} = \sqrt{(r + \frac{1}{2}s)(r - \frac{1}{2}s)}$, so ist $v = r - \sqrt{(r + \frac{1}{2}s)(r - \frac{1}{2}s)}$, mithin wird

$$f = \frac{2}{3}rs - \frac{2}{3}s\sqrt{(r + \frac{1}{2}s)(r - \frac{1}{2}s)}$$

und in dem Fall wo $r = 1$ gesetzt werden kann, erhält man

$$f = \frac{2}{3}s\left(1 - \sqrt{(1 + \frac{1}{2}s)(1 - \frac{1}{2}s)}\right)$$

Anmerkung. Das was aus dieser Formul gefunden wird ist immer etwas weniger als der wahre Flächenraum des Kreisabschnittes, jedoch ist der Fehler um desto unbedeutender je kleiner der Kreisabschnitt in Rücksicht der ganzen Kreisfläche ist, und lässet sich daher immer mehr und mehr vermindern, indem man einen gegebenen Kreisabschnitt in mehrere kleinere Kreisabschnitte und einer geradlinigten Figur zerfället, die Kreisabschnitte nach der hier gegebenen Formel, sowohl als die gerad-

radlinigte Figur nach §. 480 besonders berechnet, und die Summe der Kreisabschnitte und der geradlinigten Figur zum Flächenraum des gegebenen Kreisabschnittes annimmt.

§. 485.

Einen Kreisausschnitt dessen Winkel am Mittelpunkte sehr klein ist, mit hinlänglicher Genauigkeit zu berechnen.

Es sey BGCH fig. 325 der zu berechnende Kreisausschnitt, so ist nach vorigem §. der Kreisabschnitt BGCIB oder $f = \frac{2}{3} v . s$, und nach §. 474 der Flächenraum des Dreyeckes $BHC = \frac{1}{2} BC . IH = \frac{1}{2} s . (r - v) = \frac{1}{2} s . r - \frac{1}{2} s . v$. Setzt man daher den Flächenraum des Ausschnittes F, so ist Tab. XI.

$$F = \frac{2}{3} v . s + \frac{1}{2} s . r - \frac{1}{2} v . s = \frac{1}{6} v . s + \frac{3}{6} s . r = \frac{1}{6} s (v + 3 r)$$

oder da $v = r - \sqrt{(r + \frac{1}{2} s)(r - \frac{1}{2} s)}$, so ist

$$F = \frac{1}{6} s (4 r - \sqrt{(r + \frac{1}{2} s)(r - \frac{1}{2} s)})$$

Setzt man aber den Halbmesser k des Kreises $= 1$, so ist

$$F = \frac{1}{6} s (4 - \sqrt{(1 + \frac{1}{2} s)(1 - \frac{1}{2} s)})$$

Da wir beym Sechs und Neunzig-Eck die Seite $= 0{,}065438166$ gefunden haben, so ergiebt sich, wenn man diesen Werth für s hier setzt, der Flächenraum des sechs und neunzigsten Theiles eines Kreises, dessen Halbmesser

= 1 ist, mit vieler Genauigkeit = 0,032724 9221, welche Zahl, wenn sie 96 mahl genommen wird, dienet: den Flächenraum eines Kreises dessen Halbmesser = 1 ist, mit ziehmlicher Genauigkeit zu bestimmen.

Da nun diese Zahl 96 mahl genommen 3,14159252 16 bringt, so schliesset man: der Flächenraum eines Kreises dessen Halbmesser = 1 könne durch diese Zahl ausgedruckt werden. Eine ähnliche genauere Rechnung, bey welcher eine nach §. 483 berechnete Seite = einer mehr vielseitigen Figur gebraucht ist worden, setzet diese Zahl auf 3,14159265358979323 846. von welcher Zahl, die wir künftig immer * nennen wollen, man so viele Ziffern des zehentheiligen Bruches nehmen kann, als zu jeder Absicht erfordert werden, und woraus wir sehen, daß, wenn man nach dem eben angegebenen Verfahren, den Flächenraum eines Kreises aus der berechneten Seite des Sechs und Neunzig-Eckes bestimmen wollte, man bereits schon auf die 7te Ziffer des zehentheiligen Bruches zu fehlen anfangen würde, welcher Fehler aber dadurch vermindert werden kann, daß man zur Bestimmung eine, nach §. 483 berechnete Seite einer mehrseitigen Figur gebrauchet.

Anmerkung. Ob es nun gleich nicht möglich ist die Zahl * völlig genau zu bestimmen, so ist es doch möglich sich dem wahren Werthe dieser Zahl immer mehr und mehr zu nähern. In den meisten Fällen reichet

diese

diese Zahl, so weit sie oben angegeben ist, schon zu, und wir können immer in Fällen wo die Rede von Anwendungen der Meßkunst zur Berechnung der Flächen und Körper ist, annehmen, die Zahl π sey völlig genau bestimmt, besonders, wenn wir die oben angegebenen Ziffern des zehentheiligen Bruches alle beybehalten, und so lassen sich folgende Aufgaben sämmtlich mit völliger Richtigkeit auflösen.

§. 486.

Aus dem gegebenen Durchmesser eines Kreises seinen Umkreis zu finden.

Es sey der Durchmesser eines Kreises = d, sein Umkreis = p, so ist (§. 668).

$$p = \pi . d$$

oder der Umkreis einer Kreisfläche wird gefunden, wenn man die Zahl π mit dem gegebenen Durchmesser vervielfältiget.

Beyspiel. Es sey d = 2731 Fuß, so ist der gesuchte Umkreis.

$$p = 3,14159 . 2731 = 8579,7$$

Fuß, oder der Umkreis einer Kreisfläche, dessen Durchmesser 2731 Fuß ist, muß 8579 Fuß und 7 zehentheilige Zolle groß seyn.

Anmerkung. Je größer der Durchmesser eines Kreises ist, desto mehrere Stellen des zehentheiligen Bruches der Zahl π müssen auch bey der Rechnung gebraucht werden,

und da ist die Arbeit nicht immer gleich leichte. Ich habe daher zu Ende dieses Werkchen einige kleine Tabellen geliefert, welche dienen dergleichen Berechnungen sehr zu erleichtern, darunter ist nun die Tabelle unter der Aufschrift Vielfache der Zahl = diejenige, welche hier mit Nutzen gebraucht werden kann; um dieses desto besser einzusehen, dienet folgendes Beyspiel.

Es sey der Durchmesser eines Kreises = 9854328,763 Ruthen, wie groß ist sein Umkreis?

Diese Frage wird, wie aus unten stehender Rechnung zu ersehen, folgendermaßen aufgelöset.

Man schreibe die gegebene Zahl, welche den Durchmesser des Kreises ausdrücket gehörig hin, ziehe unter der hingeschriebenen Zahl einen Strich, und trennet durch einen andern Strich, der von oben nach unten läuft, die ganze Zahl von den zehentheiligen Bruche, wie dieses alles aus dem Beyspiele selbsten deutlich zu ersehen ist.

Man fange die Rechnung bey der höchsten Ziffer der vorgegebenen Zahl an, demnach hier bey 9 und schreibe unter dieselbe das neunfache aus der oben angeführten Tafel, nehmlich 28,2743 . . . . dergestalt, daß von den 28 Ganzen die 8 Einer grade unter die 9 zu stehen kommen,

und

und die Zehner vorne, die Zehentheile, Hunderttheile u. s. w. aber hinten gehörig folgen, wobey man übrigens die Genauigkeit so weit treiben kann, als man will; denn setzet man sich vor; den gesuchten Umkreis bis auf 0,001 einer Ruthe richtig zu bestimmen, so muß man, um mehrerer Sicherheit willen, lieber etliche Stellen der zehentheiligen Brüche mehr nehmen, welche Stellen übrigens nur dienen, um beym Zusammenrechnen auf die herausgebrachte Summe bey der letzten Ziffer nicht um mehrere Einer zu fehlen, wobey übrigens auch die Vorsicht gute Dienste leistet, für die Ziffer mit welcher die Zahl abgebrochen werden muß Eins mehr zu nehmen, sobald die darauffolgende abgebrochene Ziffer 5 oder größer als 5 ist; dieses ist hier bey der letzten Ziffer der ersten Reihe geschehen, welche nach der Tafel 0 seyn sollte, wegen der darauf folgenden 8 aber haben wir, der grössern Genauigkeit wegen, 1 gesetzt, da 8 grösser ist als 5.

Auf eben die Weise ist mit den übrigen Ziffern der vorgegebenen Zahl zu verfahren, als wodurch wir eben so viele Reihen von Zahlen finden, als die vorgegebene Zahl Ziffern hat. Die Summe aller dieser Reihen Zahlen giebt endlich den gesuchten Umkreis, welcher in diesem Falle 30 Millionen, 958 Tausend, 286 Ru-

then, 8 Fuß, 4 Zoll, 8 linien zehentheiliges Maaß würde gefunden werden.

985432 8|763

28274333	88231
2513274	12287
157079	63268
12566	37061
942	47780
62	83185
25	13274
2	19911
	18850
	942

30958286|848

§. 487.

Aus dem gegebenen Umkreise einer Kreisfläche den Durchmesser derselben zu finden.

Aus der Gleichung $p = \pi . d$ des vorigen §. folgt unmittelbar

$$d = \frac{p}{\pi}$$

oder der Durchmesser eines Kreises wird gefunden, wenn man den gegebenen Umkreis desselben mit der Zahl π theilet.

Beyspiel. Wenn der Umkreis eines Kreises 2000 Fuß betragen soll, wie groß muß sein Durchmesser genommen werden.

Hier

Hier ist

$$d = \frac{2000}{3,14159} = 636,62,$$

folglich muß der gesuchte Durchmesser 636 Fuß, 6 Zoll, 2 Linien oder der Halbmesser 318 Fuß, 3 Zoll, 1 Linie groß genommen werden.

Anmerkung. Wenn der gegebene Umkreis etwas beträchlich groß ist, so kann man sich hier mit eben dem Vortheil wie im vorigen §. der Tafel bedienen, welche die Vielfache der Zahl π enthält, wir wollen hiervon noch folgendes Beyspiel geben.

Es sey der Umkreis einer Kreisfläche = 789325486,432, so kommt die Rechnung so zu stehen, und ist leichte mit Beihülfe der angeführten Tafel einzusehen.

789325486,432	251250105,748
628318530 7179	4
161006955 71404	Um diese Theilung zu verrichten sucht man nur in angeführter Tafel die Zahl welche zunächst bey 7893 u.s.w. grenzet, da diese hier 62831 u.s.w. ist, so wird sie hingeschrieben
157079632 67949	
3927323034 55	
3141592652 59	
785730380 96	
628313530 72	
157411850 24	
157079632 68	
332217 56	
314159 27	

1805829 und abgezogen,
1570796 und da in der
235033 Tafel bey derſel-
219911 ben 2 ſteht, ſo
15122 wird das 2 hin-
12566 ter den Strich
2556 geſetzt; eben ſo
2513 geht man weiter
43 bis man ſo viel zehentheilige Brüche, als man gebrauchet, erhalten hat.

Da $\frac{p}{\pi} = \frac{1}{\pi} . p$ und $\frac{1}{\pi} = 0,31830$ 98861837906715377 68, ſo iſt auch d = 0,318309 . . . . . oder der gegebene Umkreis einer Kreisfläche darf nur mit der Zahl 0,3183 . die man ſo weit nehmen kann als es nöthig iſt, vervielfältiget werden.

Ich habe für dieſe Zahl gleichermaßen die Vielfache berechnet, und in einer Tabelle unter der Aufſchrift Vielfache der Zahl $\frac{1}{\pi}$ gebracht, und zu Ende hier beygefüget. Mittelſt dieſer Tabelle findet ſich ohne weitere Rechnung für 2 die Zahl 1,63662, folglich muß für p = 2000, a = 636,62 ſeyn, ſo wie wir dieſes oben durch ein anderes Verfahren gefunden haben.

Ist p durch eine große Zahl ausgedruckt, so wird eben so verfahren wie oben beym Gebrauche der Tafel der Vielfache, der Zahl π ist gelehret worden. Ich werde daher künftig von dem Gebrauch ähnlicher Tafeln nur zuweilen ein Beyspiel geben, da die hier gegebene dienen, um sich davon einen richtigen Begrif zu machen.

§. 488.

Aus dem gegebenen Durchmesser eines Kreises den Flächenraum des Kreises zu finden. (§. 671).

Es sey der Durchmesser d, der Flächenraum K, so ist

$$K = \frac{1}{4}\pi \cdot d^2$$

oder der Flächenraum eines Kreises wird gefunden, wenn man den vierten Theil der Zahl π zweymal hintereinander mit dem gegebenen Durchmesser vervielfältiget.

Beyspiel. Wenn der Durchmesser eines Kreises 127 Fuß ist, wie groß ist der Kreis?

Da $\frac{1}{4}\pi = 0,7853981633974483096$ 15661 ist, so findet sich, indem man von dieser Zahl die 10 ersten Ziffern nimmt, weil hier keine größere Genauigkeit nöthig ist,

$$K = 0,7853981634 \cdot 127 \cdot 127 =$$

12667,6870 oder die Kreisfläche, dessen Halbmesser

messer = 127 Fuß ist, beträgt 12667 Flächenfuß, 68 Flächenzolle, 70 Flächenlinien, oder auch 126 Flächenruthen, 67 Flächenfuß, 68 Flächenzolle und 70 Flächenlinien.

Da K = 0,78539816339744830961 5661 d^2 ist, und die Quadrate der Zahlen von 1 bis 1000 berechnet, und in Tabellen gebracht sind, so habe ich, um dergleichen Berechnungen zu erleichtern, die 3te Tafel unter der Aufschrift Vielfache der Zahl $\frac{1}{4}\pi$ berechnet, die immer mit vielem Nutzen gebraucht werden kann, sobald der Durchmesser mit sich selbsten vervielfältiget ist worden, als wodurch d^2 gefunden wird.

Die Berechnung des letzten Beyspieles würde mittelst dieser Tafel folgendermaßen geschehen können.

Da 127 . 127 = 16129 | ist, so ergiebt sich aus der Tafel

. 7853	681634
4712	388980
. 78	539816
15	707963
7	068583
12667	6872

oder 126 Flächenruthen, 67 Flächenfuß, 68 Flächenzolle und 70 Flächenlinien, so wie bereits oben ist gefunden worden.

§. 488.

§. 489.

Aus dem gegebenen Umkreise einer Kreisfläche den Flächenraum derselben zu berechnen.

Es sey der gegebene Umkreis p, der gesuchte Flächenraum K, so ist der Durchmesser.

$d = \frac{p}{\pi}$ und $d^2 = \frac{p^2}{\pi^2}$

Da nun nach vorigem §. $K = \frac{1}{4}\pi \cdot d^2$ gefunden wird, so ist $K = \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{p^2}{2\pi} = \frac{p^2}{4\pi} =$

$\frac{1}{4\pi} \cdot p^2$, oder

$K = 0{,}079577471545947666784442\, p^2$

oder: die Zahl 0, 079 . . . . zweymal hintereinander mit dem gegebenen Umkreise vervielfältiget, giebt den Flächenraum des Kreises.

Ich habe zur bequemern Berechnung die 4te Tafel unter der Aufschrift Vielfache der Zahl $\frac{1}{4\pi}$ berechnet.

Beyspiel. Wenn der Umkreis einer Kreisfläche 573 Fuß ist, wie groß ist der Flächenraum?

Da hier $p = 573$, so ist

$p^2 = 328329$ und hiermit findet sich

aus der Tafel	23873	2415
	1591	5494
	636	6198

. 23	8732
. 1	5915
.	7162

26127|59

oder der Flächenraum eines Kreises, dessen Umkreis 573 Fuß ist, muß 26127, 59 Flächenfuß oder 261 Flächenruthen, 27 Flächenfuß und 59 Flächenzolle enthalten.

§. 490.

Aus dem gegebenen Flächenraum eines Kreises dessen Durchmesser zu finden.

Wenn hier eben die Benennungen wie im vorletzten §. beybehalten werden, so wird, weil $K = \frac{1}{4} \pi d^2$, $d^2 = \frac{4K}{\pi}$ mithin

$$d = 2\sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot \sqrt{K}$$

oder der Durchmesser einer Kreisfläche wird gefunden, wenn die doppelte Quadrat-Wurzel aus der Zahl $\frac{1}{\pi}$ mit der Quadrat-Wurzel der vorgegebenen Fläche vervielfältiget wird.

Da $2\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 1,128379167095512573896160$ ist, so habe ich die Vielfache dieser Zahl in die 5te Tafel angegeben, um dergleichen Berechnungen dadurch zu erleichtern; denn so wird $d = 1,1283 \ldots \sqrt{K}$ gefunden.

Bey-

Beyspiel. Es sey ein Kreis zu beschreiben, dessen Flächenraum 793 Flächenfuß halte, man soll den Durchmesser finden.

Da K = 793, so findet sich

$\sqrt{K}$ = 28,1602556 und mittelst der

5ten Tafel

22,56758
9,02703
11284
6770
23
6

31,7754 Fuß.

Ein Kreis dessen Flächenraum 763 Flächenfuß betragen soll, muß demnach 31 Fuß, 7 Zoll, $7\frac{1}{2}$ linie zum Durchmesser oder 15 Fuß, 8 Zoll, $8\frac{3}{4}$ linien zum Halbmesser haben.

§. 491.

Aus dem Halbmesser eines Kreisausschnittes, und dem Verhältniß seines Bogens zum ganzen Umkreise den Flächenraum zu berechnen.

Es sey a c b fig. 326 der gegebene Kreisausschnitt dessen Halbmesser b c = r, so ist der Durchmesser $d = 2r$ und $d^2 = 4r^2$. Da nun nach §. 488 die Kreisfläche $K = \frac{\pi d^2}{4}$ ist,

so wird, wenn man für d^2 den eben gefundenen Werth $4r^2$ setzet, die Kreisfläche $K = \pi r^2$. Ist nun das Verhältniß des Bogens a b

zum

zum ganzen Umkreise = n : 1, so schliesse man

1 : n = πr^2 : zum gesuchten Flächenraum des Kreisausschnittes; wird daher dieser Flächenraum Q gesetzt, so ist

$$Q = n . \pi . r^2$$

oder der Flächenraum eines Kreisausschnittes wird gefunden, wenn man das Quadrat des Halbmessers mit der Zahl π, und mit der Zahl, welche das Verhältniß des Bogens des Kreisausschnittes zum ganzen Umkreise ausdrückt vervielfältiget.

Beyspiel. Es sey der Halbmesser r = 257 Fuß, das Verhältniß des Bogens a b zum ganzen Umkreise = $\frac{13}{157}$: 1 also n = $\frac{13}{157}$, so ist

$r^2 = 66049$ mithin $n . r^2 = \frac{13 . 66049}{157} =$

5469,0025

15707,96326 Mittelst der ersten Tafel

1256,63706

188,49556

28,27433

628

157

17181,3781 Flächenfuß, oder der gesuchte Flächenraum Q des Kreisausschnittes beträgt in diesem Falle 171 Flächenruthen, 81 Flächenfuß, 37 Flächenzolle und 81 Flächenlinien.

Aus

Aus $Q = n \cdot \pi r^2$, folgt sogleich

1) $n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{Q}{r^2}$ und 2) $r = 2\sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{n}}$

Davon die erste Formel dienet, um mittelst des gegebenen Flächenraumes Q und des Halbmessers r das Verhältniß des Kreisbogens zum ganzen Umkreise zu finden, und welche durch Beyhülfe der 2ten Tafel leicht aufgelöset wird; die zwote aber, um mittelst des gegebenen Flächenraumes und dem Verhältnisse deß Bogens zum ganzen Umkreise den Halbmesser zu finden, und wobey insbesondere wieder die fünfte Tafel nützliche Dienste leisten kann.

Berechnungen einiger krummen Oberflächen.

§. 492.

Die krumme Oberfläche einer graden runden Säule zu berechnen.

Wenn der Umkreis der Grundfläche bekannt ist, und p genennt wird, die Höhe aber $= h$ und die krumme Oberfläche $= O$ gesetzt wird, so ist nach §. 350.

$$O = p \cdot h.$$

oder die krumme Oberfläche einer graden runden Säule wird gefunden, wenn man

den Umkreis ihrer Grundfläche mit ihrer Höhe vervielfältiget.

Ist hingegen bloß der Durchmesser d der Grundfläche bekannt, so ist $p = \pi d$ nach §. 486 und hiermit

$$O = \pi . d . h .$$

oder die krumme Oberfläche einer graden runden Säule wird gefunden, wenn man die Zahl π mit dem Durchmesser der Grundfläche und der Höhe der graden runden Säule vervielfältiget.

Hier läßt sich demnach die erste Tafel wiederum mit vielem Nutzen gebrauchen.

Aus dieser letzten Formel lassen sich unmittelbar die Beweise für §. 353 — 357 herleiten, um hiervon ein Beyspiel zu geben, setze man von einer andern runden Säule die krumme Oberfläche $= O'$ den Durchmesser $= d'$ die Höhe $= h'$, so ist aus eben dem Grunde

$$O' = \pi\, d'\, h'$$

Die Formel aber mit der obigen verglichen giebt

$$O' : O = \pi\, d'\, h' : \pi\, d\, h = d'\, h' : d\, h$$

§. 222, oder

$$O' : O = \begin{pmatrix} h' : h \\ d' : d \end{pmatrix}$$

welches der §. 355 enthaltene Satz ist. Wird $h' = h$, so ist $O' : O = d' : d = \frac{1}{2} d' : \frac{1}{2} d =$ $p' : p$. §. 249, welches der §. 354 behauptete Satz ist. Nimmt man aber $d' = d$, so ist

O' :

$$O' : O = h' : h$$

ein Satz so im §. 353 ist vorgetragen worden.

Da ein Rechteck durch die Axe geschnitten, den Durchmesser der Grundfläche zur Grundlinie, und die Höhe der runden Säule zur Höhe hat, so folgt nach §. 477, daß in den einem Fall dies Rechteck durch $d' . h'$ im andern aber durch $d . h$ könne ausgedrückt werden, da wir nun eben gesehen haben, daß jederzeit seyn müsse

$$O' : O = d' . h' : d . h$$

so hat der in §. 356 vorgetragene Satz seine Richtigkeit.

Nimmt man endlich eine grade Linie r dergestalt daß sich

$$h : r = r : d$$

verhalte, oder $r^2 = d . h$, folglich $\pi r^2 = \pi d h$, mithin $\pi r^2 = O$ sey, und beschreibt mit r den Kreis F fig. 327, so ist nach §. 488 die Fläche dieses Kreises $F = \frac{\pi (2r)^2}{4} = \frac{\pi . 4 . r^2}{4} = \pi r^2$ Tab. XI.

$= O$, welches der §. 357 angegebene Satz ist.

Da die krumme Oberfläche einer graden runden Säule durch $O = \pi . d . h$, und eine jede der Grundfläche nach §. 488 durch $K = \frac{\pi d^2}{4}$, mithin beyde zusammen durch $2K = \frac{\pi d^2}{2}$ ausgedruckt werden können, so ist die ganze Oberfläche einer jeden graden runden Säule

$$S = O + 2K = \pi . d . h + \frac{\pi d^2}{2}$$

oder $S = \pi . d (h + \frac{1}{2} d)$

oder die ganze Oberfläche einer graden runden Säule wird gefunden, wenn man die Summe der Höhe, und des Halbmessers der Grundfläche mit dem Durchmesser und der Zahl π vervielfältiget.

Beyspiel. Es sey $h = 7{,}48$ Fuß, $d = 5{,}73$ Fuß, mithin $\frac{1}{2} d = 2{,}865$, und $h + \frac{1}{2} d = 10{,}345$, folglich ergiebt sich $d (h + \frac{1}{2} d) = 5{,}73 . 10{,}345 = 59{,}27685$ mithin durch die erste Tafel

157,	07963
28,	27433
	62832
	21991
	1885
	251
	16
186,	2237

oder 186 Flächenfuß, 22 Flächenzoll, und 37 Flächenlinien, ist die ganze Oberfläche der gegebenen graden runden Säule groß.

§. 493.

Die krumme Oberfläche eines graden Kegels zu berechnen.

Es sey die gesuchte krumme Oberfläche $= q$; die Seite des Kegels $= s$, und der Umkreis

der

der Grundfläche = p gegeben, so ist nach §. 351 und §. 474

$$q = \frac{1}{2} p . s$$

oder die krumme Oberfläche eines graden Kegels wird gefunden, wenn man dessen Seite mit dem halben Umkreise seiner Grundfläche vervielfältiget.

Ist hingegen die Seite s nebst dem Durchmesser δ der Grundfläche eines graden Kegels gegeben, so wird nach §. 486 $p = \pi \delta$ mithin

$$q = \pi . s . \frac{1}{2} \delta$$

oder die krumme Oberfläche eines graden Kegels wird gefunden, wenn man die Zahl π mit der Seite des Kegels und mit dem Halbmesser seiner Grundfläche vervielfältiget.

Es kann demnach hier die erste Tafel nützlich gebraucht werden.

Da nach §. 488 die Grundfläche K durch

$$K = \frac{1}{4} \pi \delta^2$$

kann ausgedruckt werden, so ist auch

$$q : K = \pi . s . \frac{1}{2} \delta : \frac{1}{4} \pi \delta^2$$

oder nach §. 222.

$$q : K = s : \frac{1}{2} \delta$$

welches der §. 358 vorgekommene Satz ist

Wird hingegen eine grade Linie ε so genommen, daß

$$s : \varepsilon = \varepsilon : \frac{1}{2} \delta$$

mithin $s . \frac{1}{2} \delta = \varepsilon^2$ oder $\pi . s \frac{1}{2} \delta = q = \pi \varepsilon^2$ werde, und mit ε als Halbmesser ein Kreis

Tab. XI. x fig. 328 beschrieben, so kann der Flächenraum x dieses Kreises nach §. 488 durch $x = \frac{1}{4} \pi (2\varrho)^2 = \frac{1}{4} \pi . 4\varrho^2 = \pi \varrho^2$ ausgedrückt werden, mithin muß $q = x$ seyn, woraus der §. 359 vorgetragene Satz fließet.

Ist von einem andern graden Kegel die krumme Oberfläche $= q'$, die Seite s' und der Durchmesser der Grundfläche $= \delta'$, so ist aus eben dem Grunde

$$q' = \pi . s' . \frac{1}{2} \delta'$$

mithin $q : q' = \pi . s . \frac{1}{2} \delta : \pi . s' . \frac{1}{2} \delta'$ oder

$$q : q' = s . \delta : s' . \delta'$$

woraus unmittelbar der bey §. 360 gegebene Satz folget.

Vergleicht man den hier gefundenen Ausdruck für q mit dem in vorigen §. erhaltenen Ausdruck für O, so folgt

$$O : q = \pi . d . h : \pi . s . \frac{1}{2} \delta, \text{ oder}$$

$$O : q = d . h : s . \frac{1}{2} \delta$$

welches nichts anders als der §. 361 enthaltene Satz ist.

Wenn die ganze Oberfläche eines Kegels $= Q$ gesetzet wird, so ist $Q = q + K = \pi . s . \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{4} \pi \delta^2$, oder

$$Q = \pi \frac{1}{2} \delta (s + \frac{1}{2} \delta)$$

oder die ganze Oberfläche eines graden Kegels wird gefunden, wenn man die Summe der Seite und des Halbmessers der Grundfläche mit diesem Halbmesser und der Zahl π vervielfältiget.

Beyspiel. Es sey $s = 30$ Zoll, $\delta =$ 5 Zoll, mithin $\frac{1}{2}\delta = 2,5$ Zoll, so ist $s + \frac{1}{2}\delta, = 32,5$ und $\frac{1}{2}\delta(s + \frac{1}{2}\delta) = 2,5 \cdot 32,5$

$= 81,25$ und mittelst der ersten Tafel

$$\begin{array}{r} 251,32741 \\ 3,14159 \\ 62832 \\ 15708 \\ \hline \end{array}$$

255,2544 Flächenzolle oder 2 Flächenfuß, 55 Flächenzolle, 25 Flächenlinien und 44 Flächenscrupel.

Wäre bey einem graden Kegel statt der Seite s die Höhe h gegeben, so könnte daraus s mittelst der Formel $s = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}\delta^2}$ berechnet werden, und man würde

$$q = \pi \cdot \tfrac{1}{2}\delta \sqrt{h^2 + \tfrac{1}{4}\delta^2}$$

und

$$Q = \pi \cdot \tfrac{1}{2}\delta(\sqrt{h^2 + \tfrac{1}{4}\delta^2} + \tfrac{1}{2}\delta)$$ finden.

In dem Fall wo $\delta = h$ wird gefunden $Q = \frac{1}{4} \cdot \delta^2 (1 + \sqrt{5}) = 2,5416019\,\delta^2$.

Ist hingegen $s = \delta$, so wird $Q = \frac{1}{4}\pi \cdot 3\,\delta^2$.

§. 494.

Die krumme Oberfläche eines abgekürzten graden Kegels zu berechnen.

Tab. XI. Es sey bBCc fig. 329 ein abgekürzter grader Kegel, der Durchmesser BC der untern Grundfläche $= \Delta$, der Durchmesser bc der obern Grundfläche $= \delta$, und die Seite bB des abgekürzten Kegels $= \sigma$, so ist

$\Delta : \delta = AB : Ab$. mithin

$\Delta - \delta : \Delta = AB - Ab : AB$ und

$\Delta - \delta : \delta = AB - Ab : Ab$.

Da nun $AB - Ab = \sigma$, so wird

$AB = \frac{\Delta \cdot \sigma}{\Delta - \delta}$ und $Ab = \frac{\delta \cdot \sigma}{\Delta - \delta}$

und hiermit die krumme Oberfläche des ganzen Kegels ABC nach vorigen §, $\frac{\pi \cdot \Delta \cdot \sigma \cdot \frac{1}{2}\Delta}{\Delta - \delta}$,

des abgeschnittenen Kegels Abc hingegen $\frac{\pi \cdot \delta \cdot \sigma \cdot \frac{1}{2}\delta}{\Delta - \delta}$; demnach des abgekürzten Kegels

$bBCc = \frac{\pi \cdot \Delta \cdot \sigma \cdot \frac{1}{2}\Delta - \pi \cdot \delta \cdot \sigma \cdot \frac{1}{2}\delta}{\Delta - \delta}$. Setzt

man demnach die krumme Oberfläche des abgekürzten graden Kegels $= C$, so ist

$C = \frac{1}{2}\pi \cdot \sigma \cdot \frac{\Delta^2 - \delta^2}{\Delta - \delta}$, und da $\Delta^2 - \delta^2 = (\Delta + \delta)(\Delta - \delta)$;

so wird $C = \frac{\frac{1}{2}\pi \cdot \sigma (\Delta + \delta)(\Delta - \delta)}{\Delta - \delta} = \frac{1}{2}\pi \cdot \sigma (\Delta + \delta)$, oder

$C = \pi \cdot \sigma \left(\frac{\Delta + \delta}{2}\right)$

oder man vervielfältige die halbe Summe der Durchmesser beyder Grundflächen

eines

eines abgekürzten graden Kegels mit der Seite desselben und der Zahl $*$, so giebt das Product die krumme Oberfläche des abgekürzten graden Kegels.

Welche Regel mit dem Lehrsatze §. 352 einerley ist, denn wenn die Seite bB des abgekürzten graden Kegels $bBCc$ durch eine mit den Grundflächen gleichlaufende Ebene halbirt wird, so entsteht ein Kreis dessen Durchmesser $= \frac{\Delta + \delta}{2}$ und dessen Umkreis folglich nach §. 386 $= * \left(\frac{\Delta + \delta}{2}\right)$; wird nun dieser zur Grundlinie eines Rechteckes gemacht, dessen Höhe $= \sigma$, so ist sein Flächenraum $\pi . \sigma \left(\frac{\Delta + \delta}{2}\right) = C$, gleich der krummen Oberfläche des abgekürzten graden Kegels.

Mit Beyhülfe des vorigen §. folgt

$$q' : C = \pi . s' . \tfrac{1}{2}\delta' : \pi\sigma \frac{(\Delta + \delta)}{2}$$

oder $C : q' = \sigma (\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\delta) : s' . \frac{1}{2}\delta'$

welches der im §. 362 vorgetragene Satz ist.

Wird hingegen eine grade Linie R dergestalt gesucht, daß

$$\sigma : R = R : \tfrac{1}{2}\Delta + \tfrac{1}{2}\delta$$

mithin $R^2 = \sigma (\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\delta)$ und $\pi R^2 = \pi\sigma . \frac{(\Delta + \delta)}{2} = C$ werde, und mit R einen Kreis K beschrieben, so ist die Kreisfläche $K = \pi . R^2$

$\pi . R^2 = C$ welches mit dem in §. 363 enthaltenen Satz völlig übereinkömmt.

Wird hingegen bey einem andern abgekürzten Kegel die krumme Oberfläche $= C'$, die Durchmesser Δ' und δ' die Seite aber $= \sigma'$ gesetzet, so ist aus eben dem Grunde

$$C' = \pi\sigma' \left(\frac{\Delta' + \delta'}{2}\right)$$

folglich

$$C : C' = \pi . \sigma \left(\frac{\Delta + \delta}{2}\right) : \pi\sigma'$$

$\left(\frac{\Delta' + \delta'}{2}\right)$ oder

$$C : C' = \sigma \left(\tfrac{1}{2}\Delta + \tfrac{1}{2}\delta\right) : \sigma' \left(\tfrac{1}{2}\Delta' + \tfrac{1}{2}\delta'\right)$$

woraus der §. 364 vorgetragene Satz fließet.

Verbinden wir diesen §, mit §. 492 so folgt auch

$$C : O = \pi . \sigma \left(\tfrac{1}{2}\Delta + \tfrac{1}{2}\delta\right) : \pi . d . h,$$ oder

$$C : O = \sigma \left(\tfrac{1}{2}\Delta + \tfrac{1}{2}\delta\right) : d . h .$$

welches der §. 365 vorgetragene Satz ist.

Tab. VII. Wenn fig. 198 $AD = h$, $AC = s$, und der Durchmesser der den Kegel berührenden Kugel $= d$ gesetzet wird, und man nimmt $Ac = \frac{1}{2}s$, so wird, da $AC : Ac = BC : bc$, wenn man BC wie im vorigen §. $= \delta$ setzet, $bc = \frac{1}{2}\delta$. Stellt man sich nun vom Mittelpunkte der Kugel nach c eine grade Linie gezogen vor, so entsteht ein dem Dreyecke ADC ähnliches

Drey-

Dreyeck und es wird AD : AC = Gc : $\frac{1}{2}$d = 2 Gc : d = bc : d, oder

h : s = $\frac{1}{2}\delta$: d, folglich

h . d = s . $\frac{1}{2}\delta$ und π . h . d = π . s . $\frac{1}{2}\delta$.

Da nun πhd = O §. 492, und π . s $\frac{1}{2}\delta$ nach vorigen §. = q, so ist q = O, welches der §. 366 vorgetragene Satz ist.

Wird hingegen fig. 200, Ae = AB genommen, und der abgekürzte Kegel ABCD bey e durch eine mit den Grundflächen gleichlaufende Ebene geschnitten, so ist der Durchmesser des Schnittes ef = $\frac{BC + AD}{2}$; wird daher, wie hier oben, BC = Δ, und AD = be fig. 329 = δ gesetzt, so ist ef = $\frac{\Delta + \delta}{2}$. Tab. VII.

Setzt man nun den Durchmesser der den abgekürzten Kegel bey e berührenden Kugel = d, und stellet sich von e nach dem Mittelpunkt der Kugel einen Halbmesser derselben gezogen vor, so entstehen, wenn man sich auch von A auf BC eine senkrechte Linie gefället vorstellt, zwey ähnliche Dreyecke, und es wird FE : AB = eG : $\frac{1}{2}$d = 2 eG : d = ef : d = $\frac{\Delta + \delta}{2}$: d.

Setzt man daher FE = h, AB = σ, so ist

h : σ = $\frac{\Delta + \delta}{2}$: d

oder h . d = σ $\left(\frac{\Delta + \delta}{2}\right)$ mithin π . hd =

$\pi\sigma\left(\frac{\Delta + \delta}{2}\right)$ = C.

Da

Da nun $\pi . h . d = O$ ist nach §. 492, so wird auch $C = O$ welches der im §. 367 enthaltene Satz ist.

Setzt man die untere Grundfläche eines abgekürzten Kegels $= K$, die obere $= k$, so ist $K = \frac{1}{4} \pi \Delta^2$ und $k = \frac{1}{4} \pi \delta^2$; wird nun die ganze Oberfläche eines abgekürzten Kegels $= \gamma$ gesetzt, so ist $\gamma = C + K + k = \pi . \sigma \left(\frac{\Delta + \delta}{2}\right) + \frac{1}{4} \pi \Delta^2 + \frac{1}{4} \pi \delta^2 = \frac{1}{4} \pi . 2 \sigma (\Delta + \delta) + \frac{1}{4} \pi (\Delta^2 + \delta^2) = \frac{1}{4} \pi . 2 \sigma (\Delta + \delta) + \frac{1}{4} \pi (\Delta^2 + \delta^2 + 2 \Delta \delta - 2 \Delta \delta) =$

$$\frac{1}{4} \pi . 2 \sigma (\Delta + \delta) + \frac{1}{4} \pi \left[(\Delta + \delta)(\Delta + \delta) - 2 \Delta \delta\right] =$$

$$\frac{1}{4} \pi \left[(2 \sigma + (\Delta + \delta))(\Delta + \delta) - 2 \Delta \delta\right]$$

mithin

$$\gamma = \frac{1}{4} \pi \left[(2 \sigma + \Delta + \delta)(\Delta + \delta) - 2 \Delta \delta\right]$$

oder die ganze Oberfläche eines abgekürzten graden Kegels wird gefunden, wenn man die Summe der Durchmesser beyder Grundflächen um die doppelte Seite des abgekürzten Kegels vermehrt, die hierdurch gefundene Zahl aber mit der Summe der Halbmesser vervielfältiget, von dem erhaltenen Producte das doppelte Pro-

Product der beyden Durchmesser abzieht, und den gebliebenen Rest mit der Zahl $\frac{1}{4}\pi$ vervielfältiget.

Beyspiel. Es sey $\Delta = 28$ Zoll, $\delta = 20$ und $\sigma = 53$, so ist $\Delta + \delta = 48$, $2\sigma = 106$, folglich $2\sigma + (\Delta + \delta) = 106 + 48 = 154$ demnach $(2\sigma + \Delta + \delta)(\Delta + \delta) = 154 . 48 = 7393$ und $2\Delta\delta = 2 . 28 . 20 = 1120$ mithin $(2\sigma + \Delta + \delta)(\Delta + \delta) - 2\Delta . \delta = 6273$.

Wird nun diese gefundene Zahl mittelst der 3ten Tafel gehörig mit $\frac{1}{4}\pi$ vervielfältiget, so kommt

6273

471238893

15707963

5497787

235619

4926, 8027 Flächenzolle für γ oder es ist $\gamma = 49$ Flächenfuß, 26 Flächenzolle, 80 Flächenlinien und 27 Flächenscrupel.

§. 495.

Die Oberfläche einer Kugel zu finden.

Es sey der Durchmesser der Kugel $= d$, so ist der Umkreis ihrer größten Kreisfläche πd folglich wird nach §. 371 ihre Oberfläche P durch

$$P = \pi d^2$$ gefunden

oder

oder die Oberfläche einer Kugel wird gefunden, wenn man die Zahl π zweymal hintereinander mit dem Durchmesser derselben vervielfältiget.

Aus der letzten Gleichung folgt auch $d = 2\sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{P}$, welcher Ausdruck dienet, den Durchmesser einer Kugel zu finden, wenn ihre Oberfläche eine bestimmte Größe haben soll, und der sich mittelst der 5ten Tafel leicht berechnen läßt.

§. 496.

Die krumme Oberfläche eines Kugel-Abschnittes oder eines Gürtels der Kugel zu berechnen.

Es sey wiederum der Durchmesser der Kugel $= d$, die Höhe des Kugel-Abschnittes oder des Gürtels der Kugel $= h$, die krumme Oberfläche aber $= p$. so ist (§. 593)

$$p = \pi . d . h$$

oder die krumme Oberfläche eines Kugel-Abschnittes oder Gürtels der Kugel wird gefunden, wenn man die Zahl π mit dem Durchmesser der Kugel, und der Höhe des Kugel-Abschnittes oder Gürtels vervielfältiget.

Berechnungen der Körper.

§. 497.

Zur Ausmessung der Körper muß, wie bereits oben ist erinnert worden, ein anderer Körper angenommen werden, und da unter allen Körpern der Würfel am geschicktesten dazu ist befunden worden, so wird zum Maaße eines Körpers ein Würfel angenommen, dessen Seite eines, von den, zur Ausmessung der bey dem Körper vorkommenden graden Linien, gebrauchten Längenmaßes habe. Will man demnach die bey einem Körper zu messenden graden Linien mittelst eines in Fußen getheilten Maaßstabes bestimmen, und also auch in Fuße ausdrücken, so muß zur Ausmessung des Körpers ein Würfel genommen werden dessen Seite ein Fuß lang ist, und welcher daher ein körperlicher Fuß genennt werden kann; eben so wird zur Ausmessung eines Körpers ein Würfel genommen, dessen Seite einen Zoll lang ist, und deshalb ein körperlicher Zoll heißen kann, wenn die graden Linien, so zur Berechnung des Körpers gemeßen werden müßen, in Zollen bestimmt sind worden, und grade eben so ist dieses von körperlichen Ruthen, Linien und Scrupel zu verstehen.

§. 498.

Wenn die Ruthe, der Fuß, der Zoll u. s. w. beym Längenmaaße in zehen gleiche Theile ist zerfället worden, so fließen daraus folgende Eintheilungen der körperlichen Maaße (§. 685. 686).

Eine körperliche Ruthe hat 1000 körperliche Fuß, 1000000 körperliche Zolle 1000000000 körperliche linien und 1000000000000 körperliche Scrupel.

Ein körperlicher Fuß hat 1000 körperliche Zoll, 1000000 körperliche linien und 1000000000 körperliche Scrupel.

Ein körperlicher Zoll hat 1000 körperliche linien 1000000 körperliche Scrupel.

Eine körperliche linie hat 1000 körperliche Scrupel.

Ist hingegen die Ruthe, der Fuß, der Zoll u. s. w. beym Längenmaaße in zwölf gleiche Theile getheilet worden, so finden folgende Eintheilungen statt.

Eine körperliche Ruthe hat 1728 körperliche Fuß, 2985984 körperliche Zolle, 51597 80352 körperliche linien, und 8916100448256 körperliche Scrupel.

Ein körperlicher Fuß hat 1728 körperliche Zoll, 2985984 körperliche linien, und 51597 80352 körperliche Scrupel.

Ein körperlicher Zoll hat 1728 körperliche linien, und 2985984 körperliche Scrupel.

Eine

Eine körperliche Linie hat 1728 körperliche Scrupel.

Nach diesen Angaben ist es leicht das körperliche zehentheilige Maaß in zwölftheiliges, und das körperliche zwölftheilige Maaß umgekehrt in zehentheiliges zu verwandeln.

Ein Körper wird berechnet, wenn man die Anzahl der körperlichen Ruthen, Fuße, Zolle u. s. w, welche in einen vorgegebenen Körper enthalten sind, aus einigen auf die Oberfläche eines Körpers, oder sonst innerhalb desselben gemessenen, und in Zahlen ausgedrückten graden linien berechnet. Zufolge dieses Begriffes ist es leicht, nachstehende Berechnungen gehörig zu nutzen.

Berechnungen der eckigten und runden Säulen.

§. 499.

Den körperlichen Raum einer jeden eckigten Säule zu finden.

Es sey die nach §. 474 — 480 berechnete Grundfläche eines solchen Körpers = F, seine Höhe = H, der gesuchte körperliche Raum = K, so ist (§. 689)

K = F . H.

oder der körperliche Raum wird gefunden, wenn man die Grundfläche einer

eckigten Säule mit ihrer Höhe vervielfältiget.

I. Beyspiel. Es sey F = 8875,9314 zehentheilige Flächenfuß, und H = 27,51 zehentheilige Fuß, so ist

K = 8875,9314 . 27,51 = 244176,872814 zehentheilige körperliche Fuß oder 244 körperliche Ruthen, 176 körperliche Fuß, 872 körperliche Zolle und 814 körperliche Linien, nach zehentheiligem Maaß.

II. Beyspiel. Es sey F = 21 Flächenruthen, 80 Flächenfuß, 28 Flächenzolle, 86 Flächenlinien, und H = 3 Ruthen, 9 Fuß, 10 Zoll, 11 Linien, nach zwölftheiligem Maaße, so ist $F = 21 + \frac{80}{144} + \frac{28}{20736} + \frac{86}{985984}$ = 21 + 0,5555556 + 0,0013503 + 0,0000288 = 21,5569347 Flächenruthen und $H = 3 + \frac{10}{12} + \frac{11}{144} = 3 + 0,8333333 + 0,0763889 = 3,9097222$ demnach K = 21,5569347 . 3,9097222 = 84,2816261 oder, indem man den zehentheiligen Bruch nach und nach mit 1728 vervielfältiget, K = 84 körperliche Ruthen, 486 körperliche Fuß, und 1123 körperliche Zolle nach zwölftheiligem Maaße.

Aus K = F . H folgt auch umgekehrt.

$$F = \frac{K}{H} \text{ und } H = \frac{K}{F}$$

nach welchen Formeln aus dem körperlichen Raum und der Höhe einer eckigten Säule die Grundfläche, und aus dem körperlichen Raum

und

und der Grundfläche die Höhe einer jeden eckigten Säule berechnet werden können.

§. 500.

Den körperlichen Raum einer runden Säule zu berechnen.

Es sey der Durchmesser der Grundfläche d, die Höhe der runden Säule h, ihr körperlicher Raum K, so ist die Grundfläche nach §. 488 $= \frac{1}{4} * d^2$, folglich

$$K = \frac{1}{4} * d^2 . h ,$$

oder der körperliche Raum einer runden Säule wird gefunden, wenn man die Zahl $\frac{1}{4} *$ mit der viereckigten Zahl des Durchmessers, und der Höhe der runden Säule vervielfältiget.

Zur Berechnung dieser Art Körper leistet die dritte Tafel hier gute Dienste, wie mit mehrerm aus folgendem Beyspiele zu ersehen.

Es sey $d = 2\frac{1}{2}$ Fuß und $h = 21$ Fuß zwölftheiliges Maaß, so ist $d^2 = 6\frac{1}{4}$ und $d^2 h = 131\frac{1}{4} = 131{,}25$ und nun findet sich aus der 3ten Tafel.

78,5398163
23,5619449
.7853982
1570796
392699
103,083509

oder 103 körperliche Fuß, 144 körperliche Zoll und $524\frac{1}{2}$ körperliche Linien, indem man den zehentheiligen Bruch 0,083509 nach und nach mit 1728 vervielfältiget.

Aus $K = \frac{1}{4} \pi \, d^2 h$ findet sich

$$h = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{4K}{d^2}$$

oder die Höhe einer runden Säule wird gefunden wenn man die Zahl $\frac{1}{\pi}$ mit dem vierfachen körperlichen Raum vervielfältiget, und das gefundene Product mit der viereckigten Zahl des Durchmessers der Grundfläche theilet.

Hier kann bey der Berechnung die 2te Tafel nützlich gebraucht werden, besonders wenn man statt den Durchmesser d bloß dessen Halbmesser r zur Berechnung gebrauchet. Denn da $d = 2r$, so ist $d^2 = 4r^2$, und dieser Werth für d^2 in die letzte Gleichung gesetzt giebt

$$h = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{4K}{4r^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{K}{r^2}$$

Aus eben der Gleichung $K = \frac{1}{4} \pi \, d^2 h$ wird auch $d^2 = \frac{4K}{\pi . h} = 4 . \frac{1}{\pi} . \frac{K}{h}$ gefunden, woraus geschloßen wird

$$d = 2 \sqrt{\frac{1}{\pi}} . \sqrt{\frac{K}{h}}$$

oder der Durchmesser der Grundfläche einer runden Säule wird gefunden, wenn man ihren körperlichen Raum durch die Höhe theilet; aus dem Quotienten die

viereckigte Wurzel zieht, und dieselbe mit der Zahl 2 $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ vervielfältiget.

Hier läßt sich wiederum die 5te Tafel sehr nützlich gebrauchen.

Wenn die Höhe einer runden Säule dem Durchmesser ihrer Grundfläche gleich ist, so pflegt man dieselbe gleichseitig zu nennen. In diesem Fall ist nun $h = d$ mithin

$$K = \frac{1}{4} \pi d^3$$

oder der körperliche Raum einer gleichseitigen runden Säule wird gefunden, wenn man die Zahl $\frac{1}{4} \pi$ dreymal hintereinander mit dem Durchmesser der Grundfläche vervielfältiget.

Mittelst der dritten Tafel wird diese Rechnung leichter gemacht, wenn man erst die Würfelzahl des Durchmessers sucht, und dieselbe mit der Zahl $\frac{1}{4} \pi$ vervielfältiget; wie aus folgendem Beyspiele mit mehrern zu ersehen.

Es sey $d = 256$ Fuß, so ist die Würfelzahl davon 16777216, und hieraus finden sich mittelst der 3ten Tafel 13176794, 633322 körperliche Fuß oder 13176 körperliche Ruthen, 794 körperliche Fuß, 633 körperliche Zoll, und 322 körperliche Linien.

Aus $K = \frac{1}{4} \pi d^3$ ergiebt sich umgekehrt

$$d = \sqrt[3]{\frac{4k}{\pi}}$$

Berechnungen der Spitzsäulen und Kegel.

§. 501.

Da nach §. 317 eine eckigte Säule dreymal größer als eine Spitzsäule ist, welche mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat, so wird, wenn man die Grundfläche der Spitzsäule F, ihre Höhe H, und ihren körperlichen Raum K nennet zufolge des vorletzten §.

$$K = \frac{1}{3} F . H$$

oder der körperliche Raum einer Spitzsäule wird gefunden, wenn man die Grundfläche mit der Höhe vervielfältiget, und von dem gefundenen Producte den dritten Theil nimmt.

Aus dieser letzten Formel fließen leicht folgende Regeln

$$F = \frac{3K}{H} \text{ und } H = \frac{3K}{F}$$

Beyspiele würden hier überflüßig seyn, da die im vorletzte §. gegebenen unmittelbar zur Vorschrift dienen können: indem nur die daselbst herausgebrachte Zahl mit 3 getheilet werden darf, um den körperlichen Raum einer Spitzsäule zu erhalten, welche mit der eckigten Säule gleiche Grundfläche und Höhe hat.

§. 502.

Den körperlichen Raum einer abgekürzten Spitzsäule zu berechnen.

Es sey ABCDEF fig. 330 die ganze Tab. X Spitzsäule, Abcdef die abgeschnittene, und bcdefBCDEF die abgekürzte, und der körperliche Raum der ersten K, der andern k, und der dritten x, so ist, wenn wir BCDEF = F und bcdef = f setzen $K = \frac{1}{3} F . AG$ und $k = \frac{1}{3} . f . Ag$, mithin $x = K - k = \frac{1}{3} F . AG - \frac{1}{3} f . Ag$.

Nun ist nach §. 314

$$F : f = AG^2 : Ag^2$$

mithin nach §. 228

$$\sqrt{F} : \sqrt{f} = AG : Ag$$

und $Ag = \frac{AG . \sqrt{f}}{\sqrt{F}}$ folglich

$$x = \frac{1}{3} F . l - \frac{\frac{1}{3} f . AG . \sqrt{f}}{\sqrt{F}} = \frac{AG}{3\sqrt{F}} (F . \sqrt{F} - f . \sqrt{f}).$$

Aus der Verhältnißgleichung $\sqrt{F} : \sqrt{f} = AG : Ag$ folgt nach §. 215

$$\sqrt{F} : \sqrt{F} - \sqrt{f} = AG : AG - Ag$$

oder indem man die Höhe der abgekürzten Spitzsäule $AG - Ag = gG = h$ setzet

$$\sqrt{F} : \sqrt{F} - \sqrt{f} = AG : h .$$

mithin $AG = \frac{h . \sqrt{F}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}}$ und wenn dieser Werth in die Gleichung von x gesetzet wird

$$x = \frac{h \cdot \sqrt{F}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}} \cdot \frac{F\sqrt{F} - f\sqrt{f}}{2\sqrt{F}} = \frac{h\,(F\sqrt{F} - f\sqrt{f})}{3\,(\sqrt{F} - \sqrt{f})}$$

Man nehme in beyden Grundflächen der abgekürzten Spitzsäule zwo ähnlichliegende Seiten wie BC, bc oder CD, cd oder DE, de u. s. w. und setze die größere S, die kleinere s, so ist nach §. 314.

$$F : f = S^2 : s^2$$

mithin nach §. 228.

$$\sqrt{F} : \sqrt{f} = S : s$$

und folglich $\sqrt{F} = \frac{S\sqrt{f}}{s}$

Setzt man nun diesen Werth in die letzte Gleichung von x, so wird

$$x = \frac{1}{3} h \left(\frac{F \cdot S \cdot \sqrt{f} - f\sqrt{f}}{s} \right) = \frac{1}{3} h \left(\frac{F \cdot S - f \cdot s}{S - s} \right)$$

$$\frac{S\sqrt{f} - \sqrt{f}}{s}$$

indem man alle Glieder des Bruches, wodurch x ausgedruckt ist, mit s vervielfältiget, und durch $\sqrt{f}$ theilet.

Die Formel $x = \frac{1}{3} h \left(\frac{F \cdot S - f \cdot s}{S - s} \right)$ giebt nun zur Berechnung abgekürzter Spitzsäulen folgende sehr einfache Regel.

Man vervielfältige beyde Grundflächen mit ihren ähnlichliegenden Seiten, ziehe das kleinere Product vom größern ab, theile den Rest durch den Unterschied der ähnlichliegenden Seiten der Grundflächen, und vervielfältige den erhaltenen

Quotienten mit dem dritten Theile der Höhe der abgekürzten Spitzsäule, so giebt dies letzte Product den gesuchten körperlichen Raum derselben an.

Beyspiel. Es sey $F = 121'$, $f = 64'$, $S = 5\frac{1}{2}'$, $s = 4'$ $h = 57'$, so ist

$$x = \frac{1}{3} \cdot 57 \left(\frac{121 \cdot 5\frac{1}{2} - 64 \cdot 4}{5\frac{1}{2} - 4} \right) = 19$$

$$\left(\frac{665\frac{1}{2} - 256}{1\frac{1}{2}} \right) = \frac{19 \cdot 409\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}} = \frac{19 \cdot 819}{3} = 19.$$

$273 = 5187$ oder der körperliche Raum dieser Spitzsäule ist 5187 körperliche Fuß groß.

Beym Gebrauch der letzten Formel ist zu merken: daß es nicht nöthig ist, beyde Grundflächen wirklich auszumessen, indem, wenn die eine durch Ausmessungen ist bestimmt worden, die andere daraus leicht geschlossen werden kann. Denn es ist jederzeit.

$$F : f = S^2 : s^2$$

mithin $F = \frac{S^2 \cdot f}{s^2}$ und $f = \frac{F \cdot s^2}{S^2}$

Setzt man nun diesen Werth von F in die zuletzt gefundene Gleichung so wird

$$k = \frac{1}{3} h \left(\frac{\frac{S^2 \cdot f \cdot S - fs}{s^2}}{S - s} \right) = hf \left(\frac{S^3 - s^3}{3s^2 (S - s)} \right)$$

oder der körperliche Raum einer abgekürzten Spitzsäule wird gefunden, wenn man ihre Höhe mit der obern oder kleinern Grundfläche und mit dem Unterschiede der Würfelzahlen zwoer ähnlich-

liegenden Seiten der Grundflächen vervielfältiget; das gefundene aber durch das Produkt theiler, welches erhalten wird, wenn man den Unterschied zwoer ähnlichliegenden Seiten mit der viereckigten Zahl der, in der obern Grundfläche angenommenen ähnlichliegenden Seite, dreymal genommen, vervielfältiget.

Da $\frac{S^3 - s^3}{S - s} = S^2 + S \cdot s + s^2$, so wird auch

$$k = \frac{h \cdot f}{3 s^2}(S^2 + S \cdot s + s^2) = \frac{h f}{3 s^2}$$

$(S^2 + 2 S \cdot s + s^2 - S \cdot s)$.

Da nun $S^2 + 2 S \cdot s + s^2 = (S + s)^2$ so wird

$$k = \frac{h f}{3 \cdot s^2}((S + s)^2 - S \cdot s)$$

und dieses giebt zur Berechnung abgekürzter Spitzsäulen folgende Regel.

1°. Suche man die viereckigte Zahl der Summe zwoer ähnlichliegenden Seiten, und ziehe von derselben das Produkt eben diese Seiten ab.

2°. Den nach 1° gefundenen Rest vervielfältige man mit der obern Grundfläche und der Höhe der abgekürzten Spitzsäule.

3°. Theile das nach 2° gefundene Produkt mit der dreyfachen viereckigten Zahl der in der obern Grundfläche angenommenen ähnlichliegenden Seite, so giebt

der Quotient den gesuchten körperlichen Raum.

Wird endlich in der Gleichung

$$k = \frac{h \cdot f}{3 s^2} (S^2 + S \cdot s + s^2) = \frac{1}{3} h \left(\frac{f \cdot S^2}{s^2} + \frac{f \cdot S}{s} + f\right)$$

für $\frac{f \cdot S^2}{s^2}$ die Grundfläche F für $\frac{f \cdot S}{s}$ aber $\frac{f \cdot \sqrt{F}}{\sqrt{f}} = \sqrt{F} \cdot f$ gesetzt, so ergiebt sich

$$k = \frac{1}{3} h (F + f \pm \sqrt{F \cdot f})$$

oder der körperliche Raum einer abgekürzten Spitzsäule wird gefunden, wenn man zur Summe der beyden Grundflächen die viereckigte Wurzel aus dem Produkte eben dieser Grundflächen hinzusetzt, und die hierdurch erhaltende Summe mit dem dritten Theil der Höhe der abgekürzten Spitzsäule vervielfältiget.

Diese verschiedenen Regeln, eine abgekürzte Spitzsäule zu berechnen, kommen im Grunde auf eines hinaus, obgleich die eine in gewißen und bestimmten Fällen öfters der andern vorzuziehen ist; ich habe sie alle hier hergesetzt, damit ein jeder selbsten von denselben diejenige wählen könne, welche seiner Absicht am angemeßensten ist.

Eine gemeine Regel bestimmt diesen körperlichen Raum durch $k' = \frac{1}{2} h (F + f)$ allein sie ist nicht zuverläßig, sondern sehr mangelhaft wie unten mit mehrerm zu ersehen.

Nach der letzten Formel ist

$k =$

$$k = \tfrac{1}{3} h \,.\, F \mp \tfrac{1}{3} h \,.\, f = \tfrac{1}{3} h \sqrt{F \; f}.$$

Nach der angeführten falschen Regel aber würde gefunden werden

$$k' = \tfrac{1}{2} h \,.\, F \mp \tfrac{1}{2} h \,.\, f.$$

Mithin $k' - k = \tfrac{1}{2} h \,.\, F \mp \tfrac{1}{2} hf - \tfrac{1}{3} hF - \tfrac{1}{3} hF \mp \tfrac{1}{3} h\sqrt{F \,.\, f}$.

Da nun $\tfrac{1}{2} hF - \tfrac{1}{3} hF = \tfrac{1}{6} h \,.\, F$ und eben so $\tfrac{1}{2} hf - \tfrac{1}{3} hf = \tfrac{1}{6} h \,.\, f$ ist, so wird

$$K' - k = \tfrac{1}{6} h \,.\, F \mp \tfrac{1}{6} h \,.\, f \mp \tfrac{2}{6} h \sqrt{F \,.\, f}$$
$$= \tfrac{1}{6} h \,(F \mp f \mp 2\sqrt{F \,.\, f}) = \tfrac{1}{6} h \,(\sqrt{F} \mp \sqrt{f})^2.$$

Da nun wie oben schon gezeiget ist worden

$$\sqrt{F} : \mp \sqrt{f} = AG : Ag$$

so ist auch

$$\sqrt{F} \mp \sqrt{f} : \sqrt{F} = AG - Ag : AG$$

mithin da $AG - Ag = gG = h$, so ist

$$\sqrt{F} \mp \sqrt{f} = \frac{h \;\sqrt{F}}{AG}$$

und $(\sqrt{F} \mp \sqrt{f})^2 = \dfrac{h^2 \,.\, F}{AG^2}$

folglich der Fehler, so mittelst der falschen Regel begangen wird, oder

$$k' - k = \frac{\tfrac{1}{6} h^3 \,.\, F}{AG^2}.$$

Je weniger demnach h in Rücksicht der Höhe AG der ganzen Spitzsäule beträgt, desto unbedeutender ist auch dieser Fehler, nimmt aber h zu, indem AG unverändert bleibt, so

wird

wird dieser Fehler immer beträchtiger bis h = AG wird, wo sich

$$k' - k = \frac{\frac{1}{6} AG^3 . F}{AG^2} = \frac{1}{6} AG . F .$$ fin-

det. Da nun der körperliche Raum einer ganzen Spitzsäule oben $\frac{1}{3} AG . F$ ist gefunden worden, und $\frac{1}{6} AG . F$ die Helfte von $\frac{1}{3} AG . F$ ist, so folgt, daß der Fehler, welcher mittelst der falschen Regel begangen wird, in dem Fall, wo die Höhe einer abgekürzten Spitzsäule beynahe der Höhe der ganzen gleich ist, ziehmlich nahe so viel als die Helfte der ganzen Spitzsäule, davon die abgekürzte ein Theil ist, betragen würde, welches ein sehr grober Fehler zu nennen wäre.

§. 503.

Einen gegebenen Kegel zu berechnen.

Es sey der Durchmesser der Grundfläche eines Kegels = d, seine Höhe = h sein körperlicher Raum = q, so ist der körperliche Raum einer runden Säule, welche mit dem Kegel gleiche Grundfläche und Höhe hat, nach dem vorletzten §, $\frac{1}{4} \pi d^2 . h$; da nun nach §. 334 der Kegel der dritte Theil einer solchen runden Säule ist, so wird

$$q = \frac{1}{12} \pi d^2 h ,$$

oder der körperliche Raum eines Kegels wird gefunden, wenn man die Zahl $\frac{1}{12} \pi$

mit

mit der viereckigten Zahl des Durchmessers der Grundfläche, und der Höhe des Regels vervielfältiget.

Die Vielfache der Zahl $\frac{1}{12} \pi$ stellet die 6te Tafel dar, sie dienen um den körperlichen Raum eines Kegels bequemer zu berechnen.

Aus $q = \frac{1}{12} \pi d^2 h$ ergiebt sich ferner

$$h = \frac{q}{\frac{1}{12} \pi d^2} \text{ und } d = 2 \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{3q}{h}}$$

wo bey der ersten Formel die 6te, bey der 2ten aber die 5te Tafel nützliche Dienste zur Berechnung leisten kann, davon wir hier ein Beyspiel für die 2te Formel geben wollen.

Es soll ein Kegel 726 körperliche Fuß halten, und seine Höhe soll 7 Fuß seyn, wie groß muß der Durchmesser seiner Grundfläche angenommen werden?

Da hier $q = 726$ und $h = 7$, so ist $\frac{3q}{h} = 311,142857$ und $\sqrt{\frac{3q}{h}}$

$= 17,639$ und mittelst der 5ten Tafel

11 2838
7 8987
6770
339
102

19,904

oder der gesuchte Durchmesser d muß 19 Fuß, 9 Zoll, und etwas drüber groß genommen werden.

In

In dem Falle wo die Höhe eines Kegels dem Durchmesser seiner Grundfläche gleich ist, wird $h = d$, mithin

$$q = \frac{1}{12} \pi d^3$$

und umgekehrt

$$d = \frac{\sqrt[3]{2q}}{\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}}$$

oder der Durchmesser der Grundfläche eines Kegels, dessen Höhe diesem Durchmesser gleich ist, wird gefunden, wenn man die körperliche Wurzel aus dem doppelten körperlichen Raum zieht, und sie durch die körperliche Wurzel aus dem sechsten Theile der Zahl π theilet.

Zum Behuf der bequemern Berechnung ist die VII Tafel angefertiget worden, welche die Vielfache der Zahl $\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}$ enthält, und sehr die Rechnung verkürzt wie aus folgendem Beyspiele zu ersehen.

Es soll ein Kegel gebildet werden, dessen Höhe dem Durchmesser seiner Grundfläche gleich ist, und 397 körperliche Fuß enthalte, wie groß muß der Durchmesser seiner Grundfläche, und folglich auch seine Höhe genommen werden?

Hier ist $q = 397$ folglich $2q = 794$ von dieser letzten Zahl aber wird die körperliche Wurzel mittelst schon völlig berechneter Tafeln

gefunden, siehe meine Sammlung trig. Tafeln 2ten Band S. 295.

9,9799599	12,382 mittelst der
8 0599598	7ten Tafel
1 9200001	
1 6119920	
3080081	
2417988	
662093	
644797	
17296	
16120	
1176	

oder der gesuchte Durchmesser der Grundfläche eines solchen Kegels muß 12 Fuß, 3 Zoll, 8 Linien, 2 Scrupel, zehentheiliges Maaß groß genommen werden.

Da der Ausdruck $d = \frac{\sqrt[3]{2q}}{\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}}$ sich in

$d = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}} \cdot \sqrt[3]{2q}$ verwandeln läßt, so habe ich für die Zahl $\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}}$ noch eine besondere Tafel berechnet, und zuletzt beygefüget; mittelst der-

dieselben kann das vorige Beyspiel folgendermaßen berechnet werden.

$$\text{Da } \sqrt[3]{2\,9} = 9{,}97996$$

11,16631	ist gefunden wor-
1,11663	den, so ergiebt sich
8685	mittelst der 8ten
1117	Tafel
112	
7	
12,3821	

oder der gesuchte Durchmesser d der Grundfläche ist 12 Fuß, 3 Zoll, 8 Linien, 2 Scrupel zehentheiliges Maaß groß, so wie ich dieses bereits oben angegeben habe.

§. 504.

Den körperlichen Raum eines abgekürzten Kegels zu berechnen.

Es sey bBCc fig. 331 der abgekürzte Kegel, der Durchmesser der untern Grundfläche = D der obern = d und seine Höhe oder die Entfernung seiner Grundflächen von einander = h'. Tab. XI.

Man stelle sich den ganzen Kegel unter ABC vor, und nenne seine Höhe H, den abgeschnittenen aber unter Abc, und dessen Höhe sey h, so ist nach vorigen §. der körperliche Raum des ganzen Kegels $ABC = \frac{1}{12} \pi D^2 . H$, und der körperliche Raum des abgeschnitte-

nen $= \frac{1}{12} \pi d^2 . h$. Nennen wir daher den körperlichen Raum des abgekürzten Kegels x, so ist

$$x = \frac{1}{12} \pi D^2 . H - \frac{1}{12} \pi d^2 . h = \frac{1}{12} \pi (D^2 . H - d^2 . h).$$

Nun ist nach §. 340.

1) $D : d = H : h$.

und hieraus nach §. 215.

2) $D - d : D = H - h : H$.

mithin aus 1, $h = \frac{H . d}{D}$, und hiermit

$$x = \frac{1}{12} \pi \left(D^2 . H - \frac{d^2 . H . d}{D} \right) = \frac{1}{12} \pi \frac{H}{D} (D^3 - d^3).$$

Da nun aus 2 nach §. 209 folgt

$\frac{H}{D} = \frac{H - h}{D - d}$, so wird

$$x = \frac{1}{12} \pi \frac{(H - h)}{D - d} (D^3 - d^3) = \frac{1}{12} \pi (H - h) \left(\frac{D^3 - d^3}{D - d} \right)$$

oder endlich da $H - h = h'$

$$x = \frac{1}{12} \pi . h' . \frac{D^3 - d^3}{D - d}$$

oder der körperliche Raum eines abgekürzten Kegels wird gefuuden, wenn man den Unterschied der Würfelzahlen der Durchmesser der Grundflächen, durch den Unterschied dieser Durchmesser selbsten theilet, den gefundenen Quotienten aber mit der Höhe des abgekürzten Kegels,

gels, und dem zwölften Theil der Zahl π vervielfältiget.

Diese Regel hat viele Aehnlichkeit mit der ersten Regel, so ich zur Berechnung abgekürzter Spitzsäule angegeben habe, denn die letzte Formel läßt sich auch folgendermaßen ausdrücken.

$$x = \frac{1}{3} h \frac{(\frac{1}{4}\pi D^2 . D - \frac{1}{4}\pi d^2 . d)}{D - d}$$

Es ist aber $\frac{1}{4}\pi D^2$ die größere, und $\frac{1}{4}\pi d^2$ die kleinere der beyden Grundflächen, versteht man daher hier unter ähnlichliegenden Seiten der Grundflächen die Durchmesser derselben, so kann die zur Berechnung abgekürzter Spitzsäulen gegebene Regel unmittelbar dienen, abgekürzte Regel zu berechnen.

Da $\frac{D^3 - d^3}{D - d} = D^2 + Dd + d^2 = D^2 + 2Dd + d^2 - Dd = (D + d)^2 - Dd$ gefunden wird, so ist auch

$$x = \frac{1}{12}\pi . h' ((D + d)^2 - Dd)$$

oder man ziehe von der viereckigten Zahl der Summe der Durchmesser beyder Grundflächen das Product derselben ab, und vervielfältige den Rest mit der Höhe des abgekürzten Regels, und dem zwölften Theil der Zahl π, so kommt der gesuchte körperliche Raum.

Beyspiel. Es sey $D = 27{,}56$ Zoll, $d = 5{,}36$ Zoll, und $h = 53{,}2$ Zoll, so ist

$$x = \frac{1}{12}\pi . 53{,}2 (27{,}56 + 5{,}36)^2 - 27{,}56 . 5{,}36) =$$

$\frac{1}{12}\pi \cdot 53,2\ (1083,7264 - 147,7216) =$

$\frac{1}{12}\pi \cdot 49795,45536.$

Bedienet man sich nun der 6ten Tafel, so kömmt die übrige Rechnung so zu stehen

49795,45536

10471 97551197
2356 19449019
183 25957146
23 56194490
1 30899694
10471976
1308997
130900
7854
1571

13036,4197284

oder der gesuchte körperliche Raum ist 13 körperliche Fuß, 36 körperliche Zoll, 419 körperliche Linien, und 284 körperliche Scrupel zehentheiliges Maaß groß.

Berechnungen der Kugeln.

§. 505.

Den körperlichen Raum einer Kugel zu berechnen.

Es sey der Durchmesser der Kugel $= \delta$, so ist ihr größter Kreis nach §. 488 $= \frac{1}{4}\pi\delta^2$; stellt man sich nun auf diesen größten Kreis eine runde Säule vor, deren Höhe $= \delta$, so

wird

wird ihr körperlicher Raum, nach §. 500, durch $\frac{1}{4} \pi \delta^3$ ausgedrückt; da nun die Kugel, nach §. 348, zwey Drittheile einer solchen runden Säule ist, so wird, wenn man ihren körperlichen Raum k nennet, gefunden

$$k = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \pi \delta^3 = \frac{1}{6} \pi \delta^3$$

oder der körperliche Raum einer gegebenen Kugel wird gefunden, wenn man die Würzelzahl ihres Durchmessers mit dem sechsten Theil der Zahl π vervielfältiget.

Beyspiel. Es sey $\delta = 35{,}1$ Zoll, so ist $\delta^3 = 43243{,}551$ und nun mittelst der 9ten Tafel

20943,9510239	
1570,7963268	
104,7197551	
20,9439510	
1,5707963	
2617994	
261799	
5236	
22642,270356	

oder der körperliche Raum der Kugel beträgt 22 Fuß, 642 Zoll, 270 Linien, 356 Scrupel körperliches zehentheiliges Maaß.

Aus der Gleichung $k = \frac{1}{6} \pi \delta^3$, folgt umgekehrt

$$\delta = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}} \cdot \sqrt[3]{k}.$$

oder der Durchmesser einer Kugel wird gefunden, wenn man die Würfel-Wurzel des körperlichen Raumes einer Kugel mit der Zahl $\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}} = 1,2407009817988$ 0033341 vervielfältiget.

Beyspiel. Es sey die Frage: den Durchmesser einer Kugel zu finden, welche 536 körperliche Zolle enthalte.

Da hier $K = 536$, so findet sich aus den, für die Würfel-Wurzeln berechneten Tabellen.

$\sqrt[3]{k} = 8,123$ und nun mittelst der

9,926 8ten Tafel
124
25
4
10,08

oder 10 Zoll, und 8 Scrupel muß der Durchmesser einer Kugel betragen, welche 536 körperliche Zoll enthalten soll.

Auffer diesen hier angegebenen Berechnungen ebener, und krummer Oberflächen und Körper, giebt es noch andere, die sich nach Gründen der niedern Meßkunst auflösen lassen,

die

die aber ein jeder der das hier abgehandelte richtig verstanden hat, selbsten wird machen können; ich werde daher hiermit diese Berechnungen, und das ganze Werkchen schliessen, und nur zum Beschluß noch bemerken: daß, wenn die Schweere eines körperlichen Fußes oder Zolles einer Maße oder Materie bekannt ist, man immer das Gewicht eines aus dieser Maße gebildeten Körper finden könne, wenn man dessen körperlichen Raum nach den hier gegebenen Regeln berechnet, und ihn mit der Zahl vervielfältiget, welche die Schweere eines körperlichen Fußes, Zolles, einer Linie, oder eines Scrupels ausdrückt.

Taf. I. Vielfache der Zahl π.

1 = 3,141592 653589 793238 462643
2 = 6,283185 307179 586476 925287
3 = 9,424777 960769 379715 387930
4 = 12,566370 614359 172953 850574
5 = 15,707963 267948 966192 313217
6 = 18,849555 921538 759430 775860
7 = 21,991148 575128 552669 238504
8 = 25,132741 228718 345907 701147
9 = 28,274333 882308 139146 163790

Taf. II. Vielfache der Zahl $\frac{1}{\pi}$.

1 = 0,318309 886183 790671 537768
2 = 0,636619 772367 581343 075536
3 = 0,954929 658551 372014 613304
4 = 1,273239 544735 162686 151072
5 = 1,591549 430918 953357 688840
6 = 1,909859 317102 744029 226608
7 = 2,228169 203286 534700 764376
8 = 2,546479 089470 325372 302143
9 = 2,864788 975654 116043 839911

Taf. III. Vielfache der Zahl $\frac{1}{4}\pi$.

1 = 0,785398 163397 448309 615661
2 = 1,570796 326794 896619 231322
3 = 2,356194 490192 344928 846983
4 = 3,141592 653589 793238 462643
5 = 3,926990 816987 241548 078304
6 = 4,712388 980384 689857 693965
7 = 5,497787 143782 138167 309626
8 = 6,283185 307179 586476 925287
9 = 7,068583 470577 034786 540948

Taf IV. Vielfache der Zahl $\frac{1}{4\pi}$.

1 = 0,079577 471545 947667 884442
2 = 0,159154 943091 895335 768884
3 = 0,238732 414637 843003 653326
4 = 0,318309 886183 790671 537768
5 = 0,397887 357729 738339 422210
6 = 0,477464 829275 686007 306652
7 = 0,557042 300821 633675 191094
8 = 0,636619 772367 581343 075536
9 = 0,716197 243913 529010 859978

Taf. V. Vielfache der Zahl $2\sqrt{\frac{1}{\pi}}$.

1 = 1,128379 167095 512573 896160
2 = 2,256758 334191 025147 792319
3 = 3,385137 501286 537721 688479
4 = 4,513516 668382 050295 584638
5 = 5,641895 835477 562869 480798
6 = 6,770275 002573 075443 376958
7 = 7,898654 169668 588017 273117
8 = 9,027033 336764 100591 166277
9 = 10,155412 503859 613165 065436

Taf. VI. Vielfache der Zahl $\frac{1}{12}\pi$.

1 = 0,261799 387799 149436 538554
2 = 0,523598 775598 298873 077107
3 = 0,785398 163397 448309 615661
4 = 1,047197 551196 597746 154214
5 = 1,308996 938995 747182 692768
6 = 1,570796 326794 896619 231322
7 = 1,832595 714594 046055 769875
8 = 2,094395 102393 195492 308429
9 = 2,356194 490192 334928 846983

Taf. VII. Vielfache der Zahl $\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}$.

1 = 0,805995 977008 234820 355
2 = 1,611991 954016 469640 710
3 = 2,417987 931024 704461 065
4 = 3,223983 908032 939281 420
5 = 4,029979 885041 174101 775
6 = 4,835975 862049 408922 130
7 = 5,641971 939057 643742 485
8 = 6,447967 816065 878562 840
9 = 7,253963 793074 113383 195

Taf. VIII. Vielfache der Zahl $\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}}$.

1 = 1,240700 981798 800033 341
2 = 2,481401 963597 600066 683
3 = 3,722102 945396 400100 024
4 = 4,962803 927195 200133 366
5 = 6,203504 908994 000166 707
6 = 7,444205 890792 800200 048
7 = 8,684906 872591 600233 390
8 = 9,925607 854390 400266 731
9 = 11,166308 836189 200300 073

Taf. IX. Vielfache der Zahl $\frac{1}{6}\pi$.

1 = 0,523598 775598 298873 077107
2 = 1,047197 551196 597746 154214
3 = 1,570796 326794 896619 231322
4 = 2,094395 102393 195492 308429
5 = 2,617993 877991 494365 385536
6 = 3,141592 653589 793238 462643
7 = 3,665191 429188 092111 539751
8 = 4,188790 204786 390984 616858
9 = 4,712388 980384 689857 693965

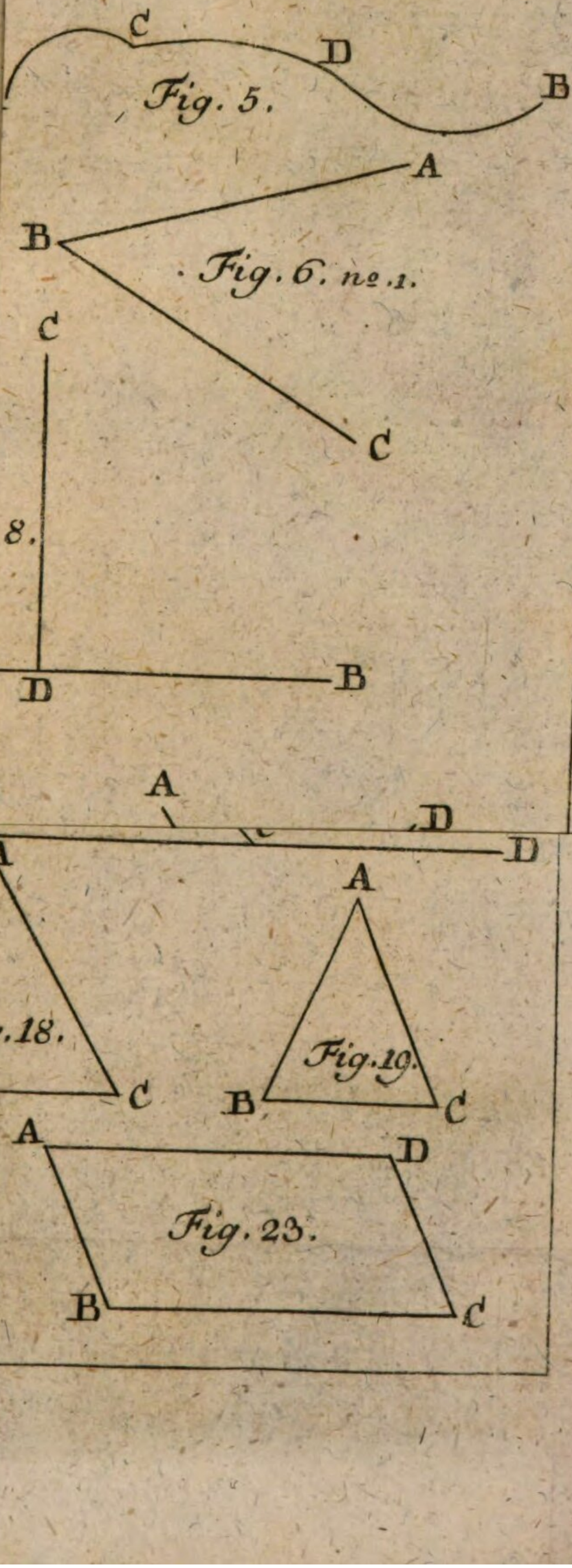


Fig. 5.

Fig. 6. nº. 1.

8.

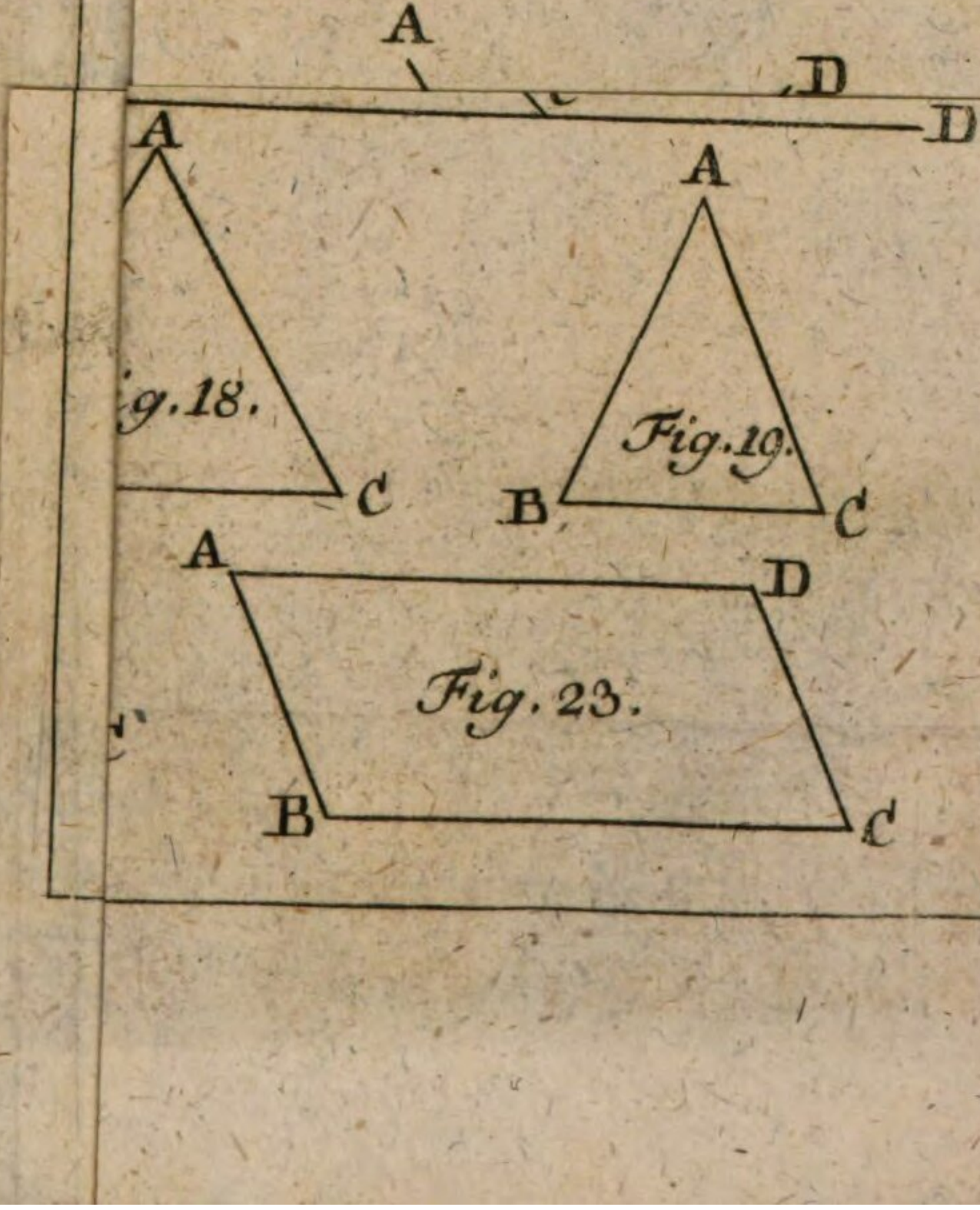


Fig. 18.

Fig. 19.

Fig. 23.

70429
35536
52643
19751
16858
39651

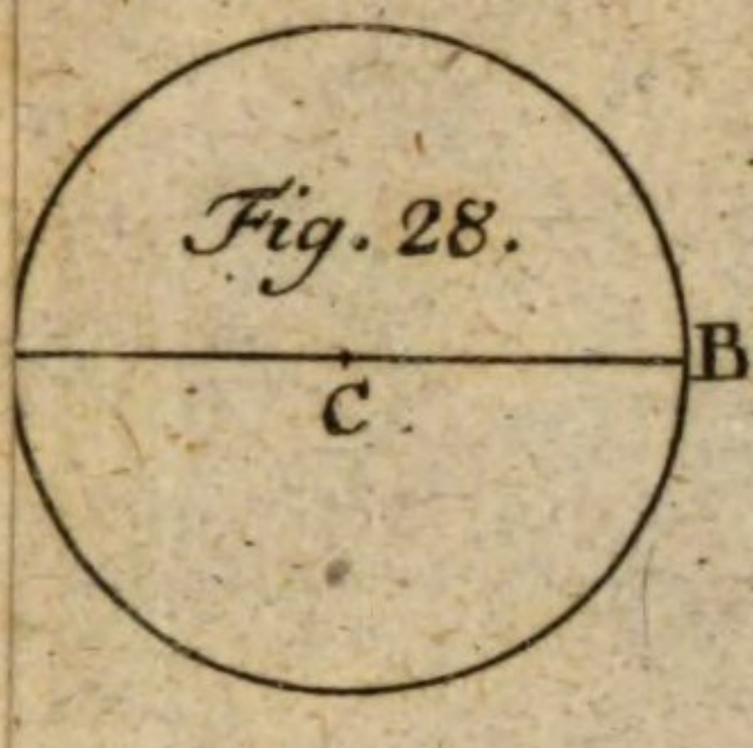


Fig. 28.

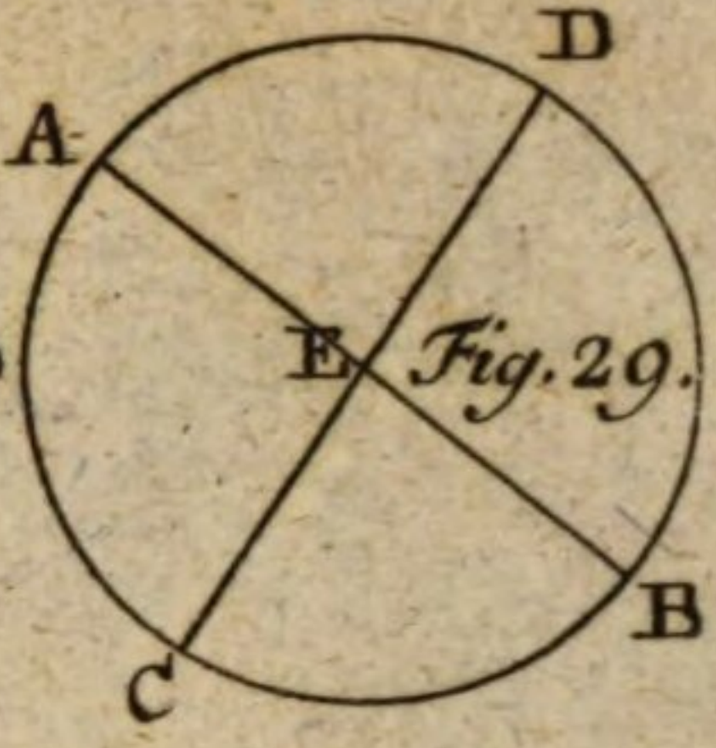


Fig. 29.

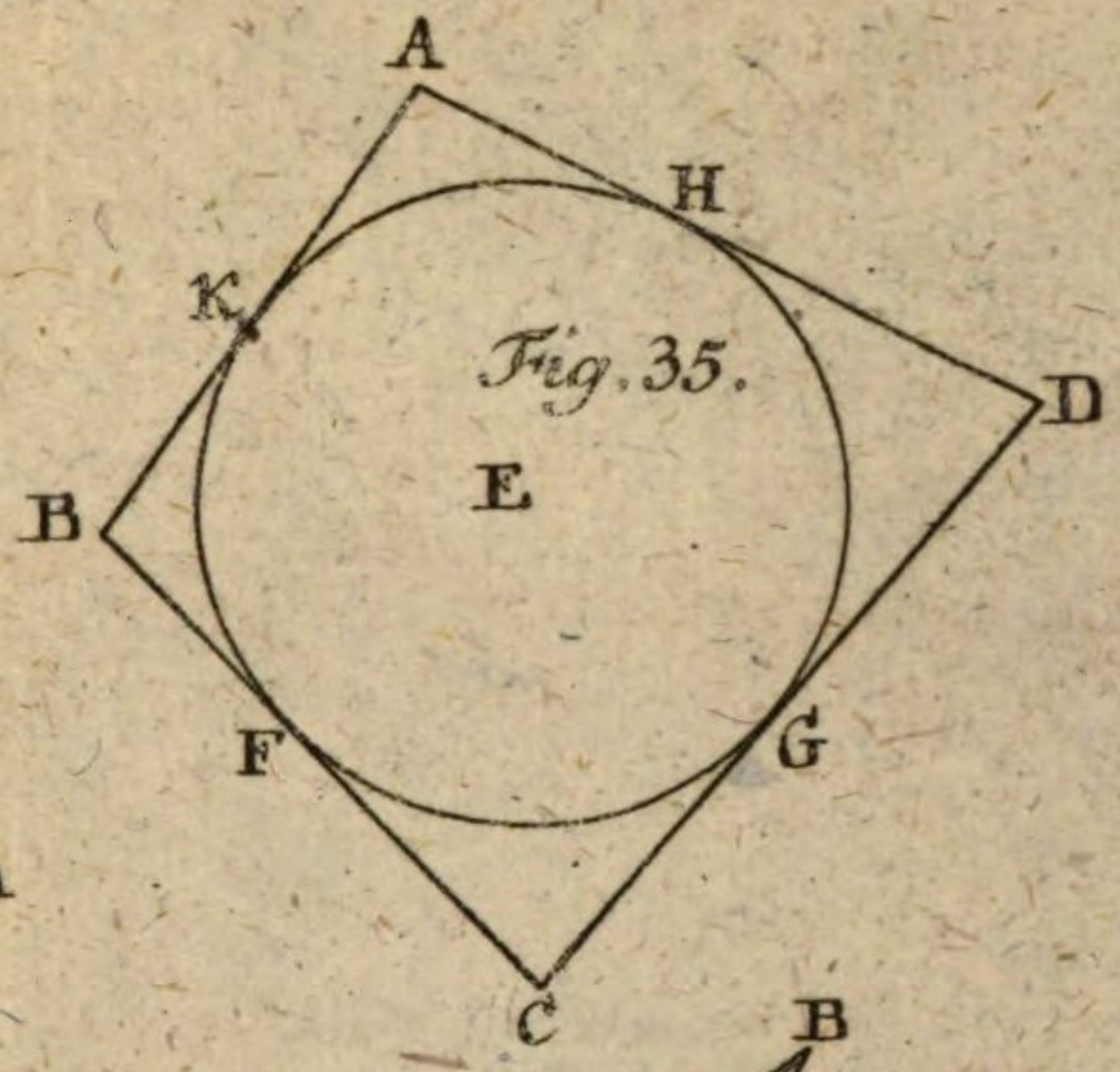
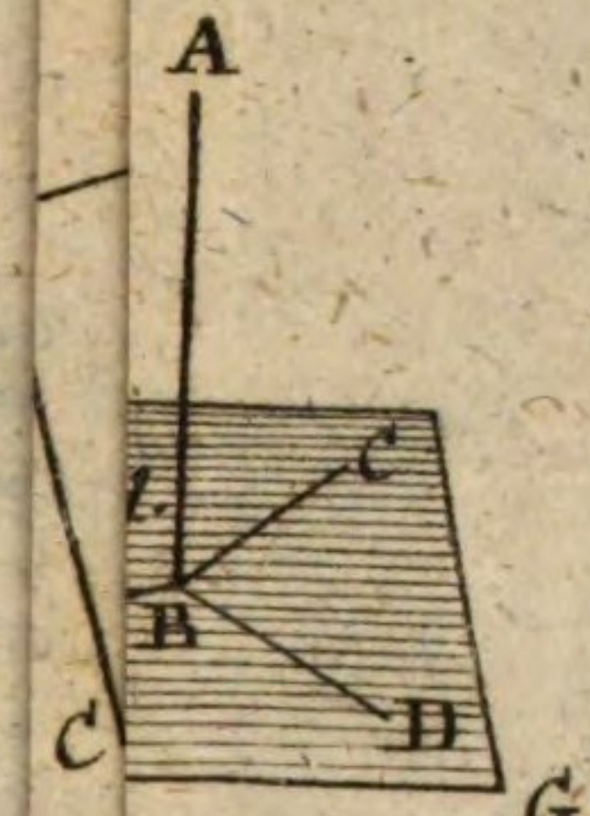


Fig. 35.



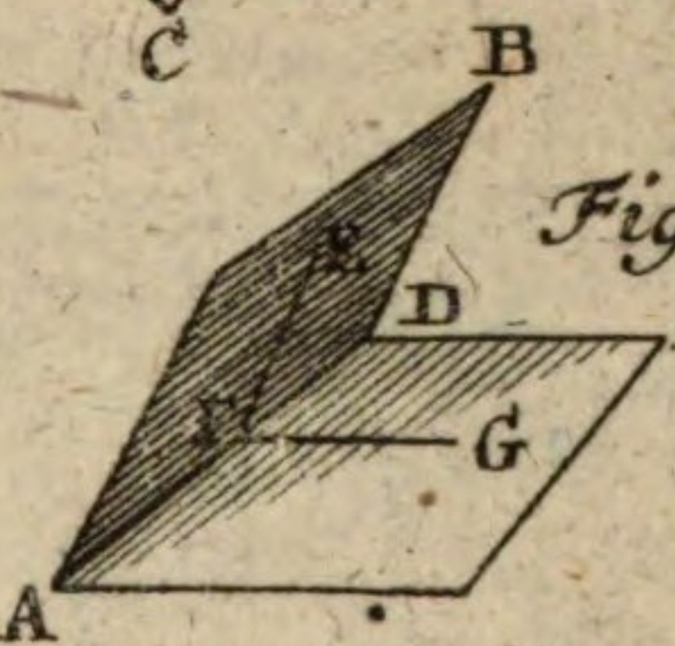
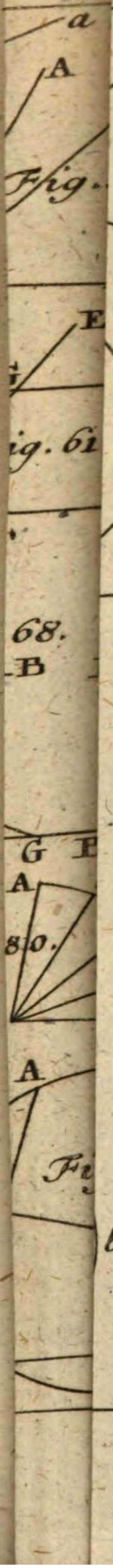
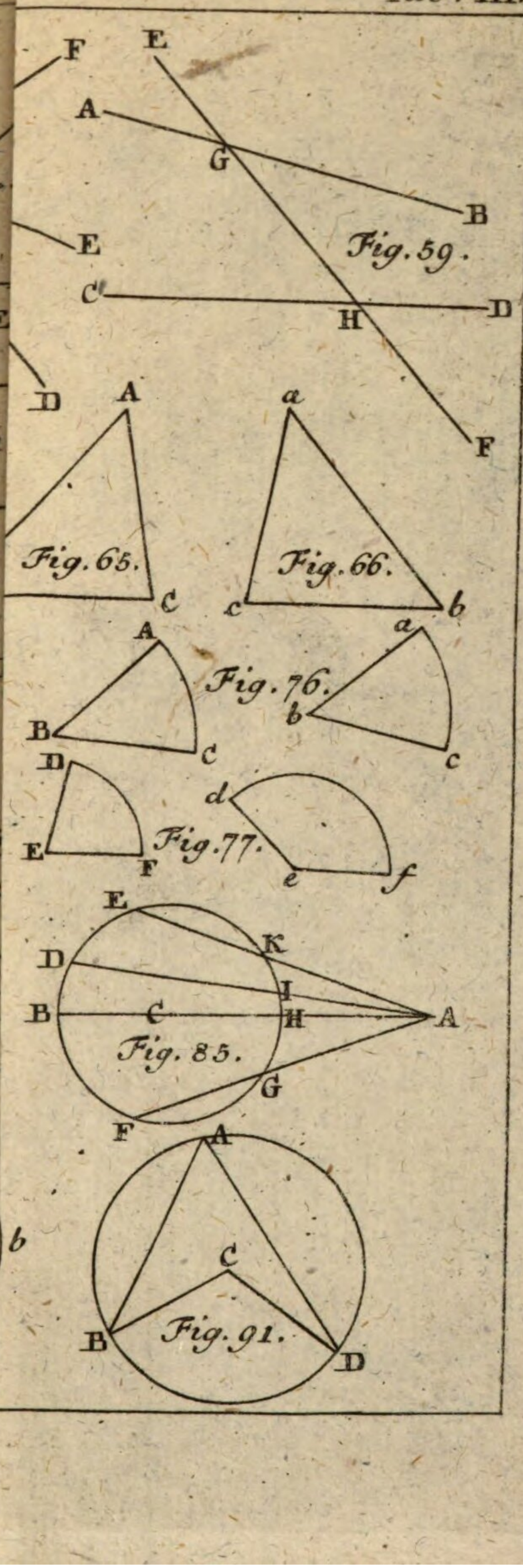


Fig. 42.


a
A
Fig.
E
ig. 61
68.
B
G F
A
80.
A
Fi
b


F
E
A
G
B
Fig. 59.
C
H
D
F
D
A
Fig. 65.
C
a
Fig. 66.
c
b
A
B
C
Fig. 76.
a
b
c
D
E
F
Fig. 77.
d
e
f
E
K
D
I
B
C
H
A
Fig. 85.
G
F
A
C
B
Fig. 91.
D

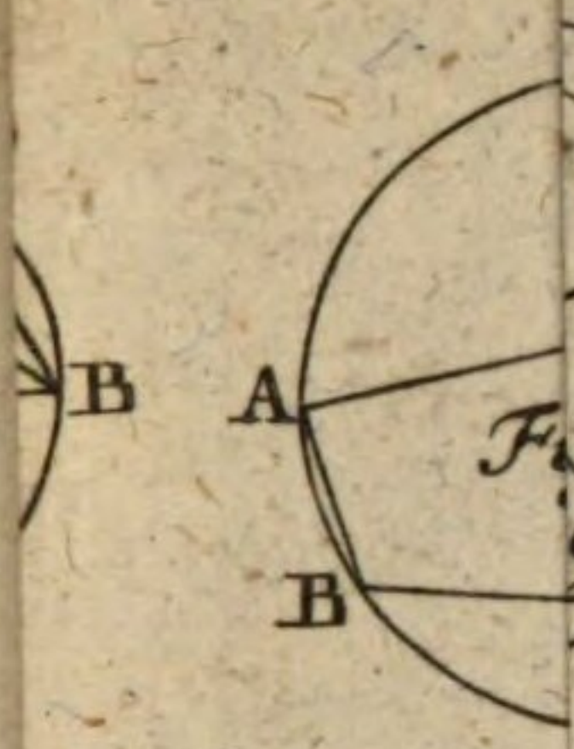


Fig. 100.

Fig. 103.

Fig. 107.

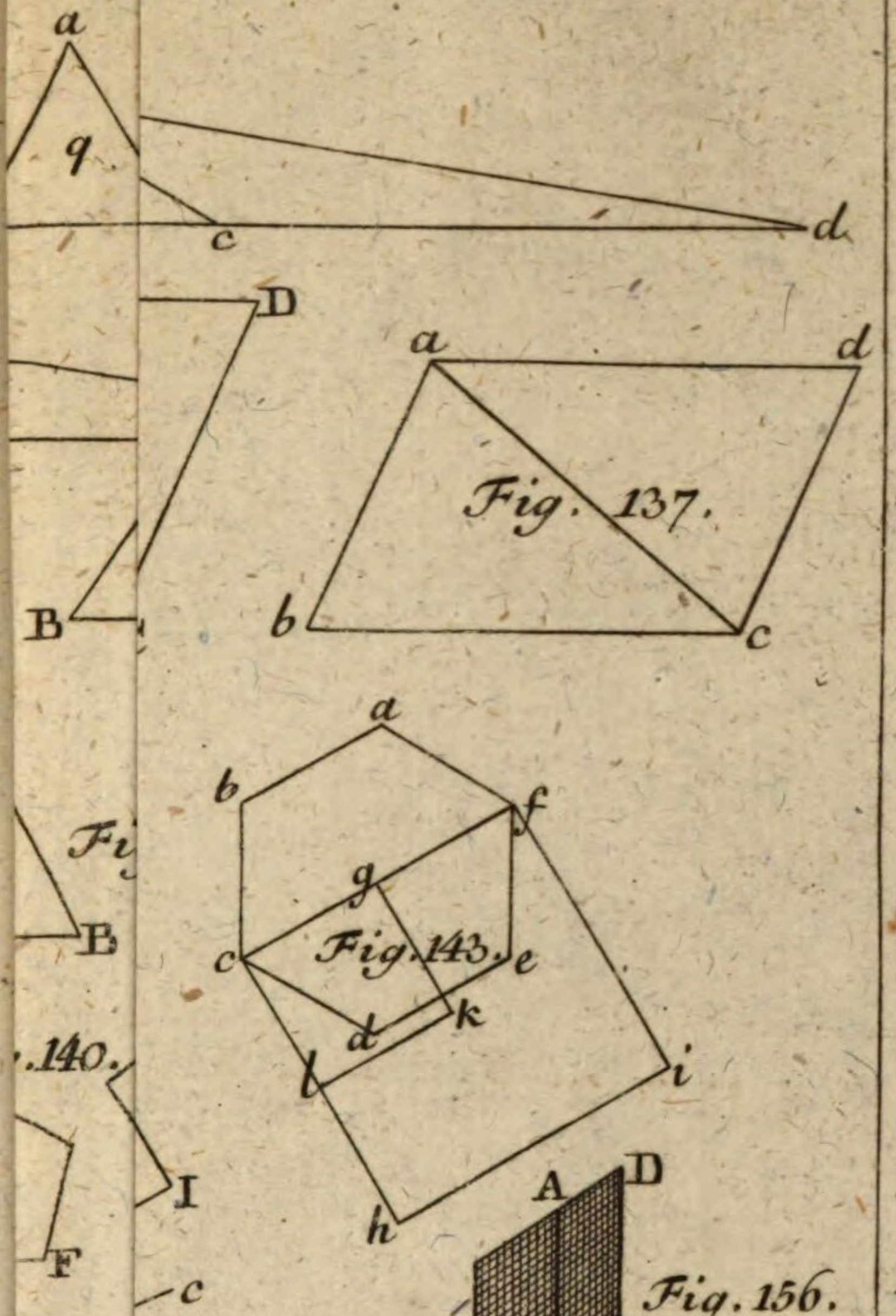
Fig. 112.

117.

Fig.

Fig. 127

Fig. 126.


a
q
c
d
D
B
a
d
b
c
Fig. 137.
a
b
f
g
c
e
d
k
l
i
Fig. 143.
A
D
G
F
B
E
Fig. 156.
Fig. 140.
I
F
c
b
5.
E
C
B
Fig. 1
A
C
E
Fig. 157.
H
D
B
F
148.
K
L
A
N
B
G
Fig. 158.
E

Tab. VI.

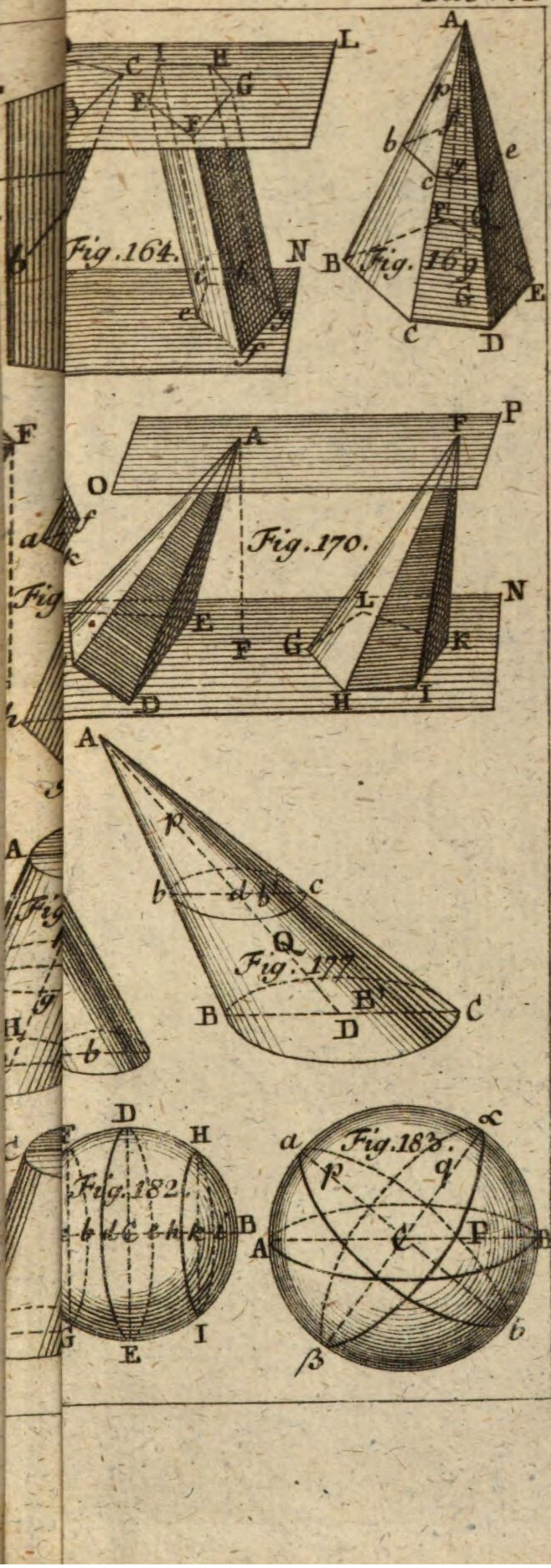

L
C
I
H
G
E
F
Fig. 164.
N
e
f
A
p
b
e
c
B
Fig. 169.
G
E
C
D
P
F
A
O
f
a
k
Fig. 170.
L
N
E
F
G
K
D
H
I
A
p
b
d
b'
c
Q
Fig. 171.
B
B'
C
D
A
Fig. 182.
C
D
H
b
d
c
e
h
k
B
G
E
I
a
Fig. 183.
p
q
c
A
C
P
B
β
b

Fig. 187.

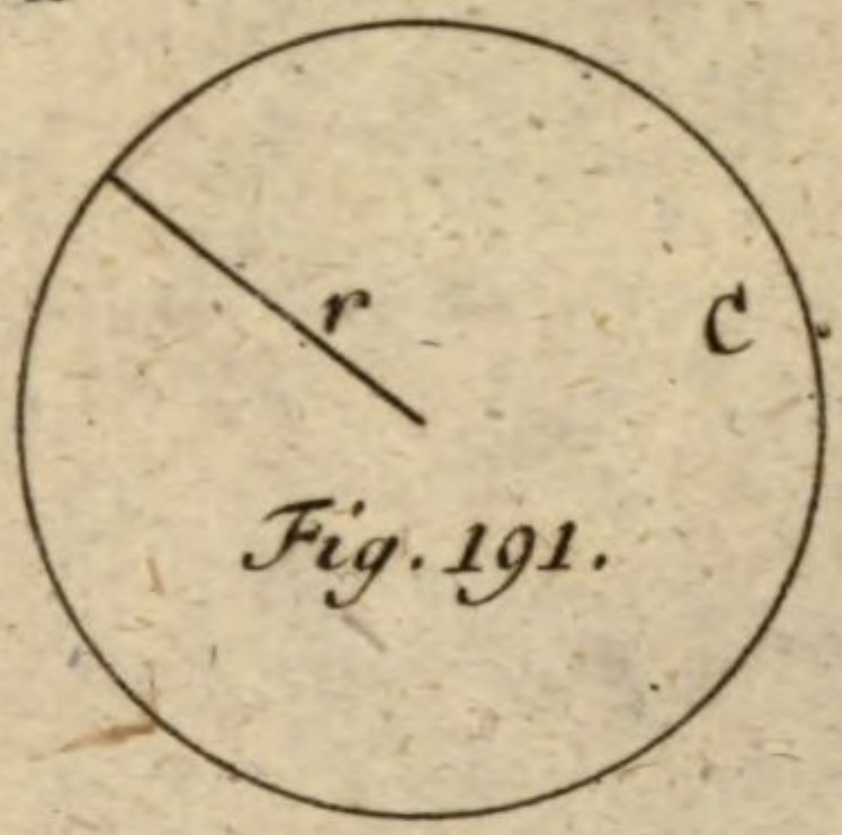


Fig. 191.

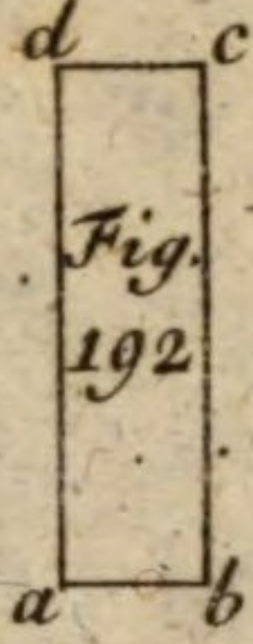


Fig. 192

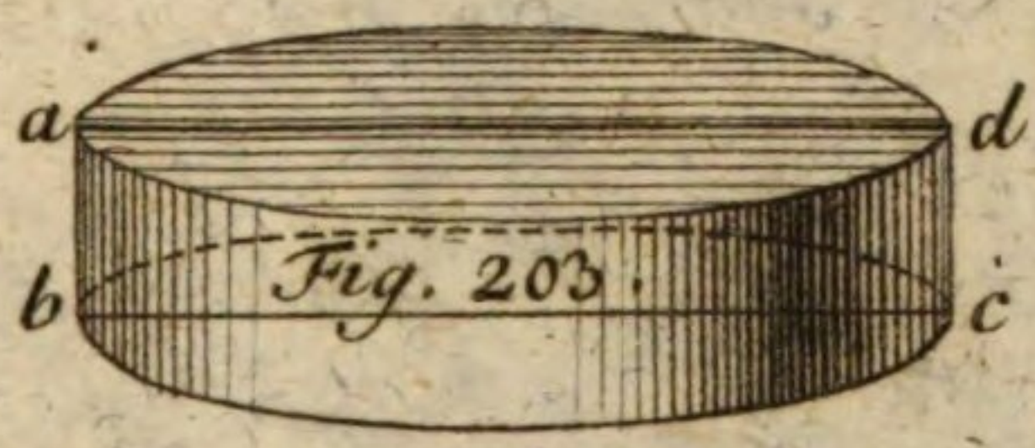


Fig. 203.

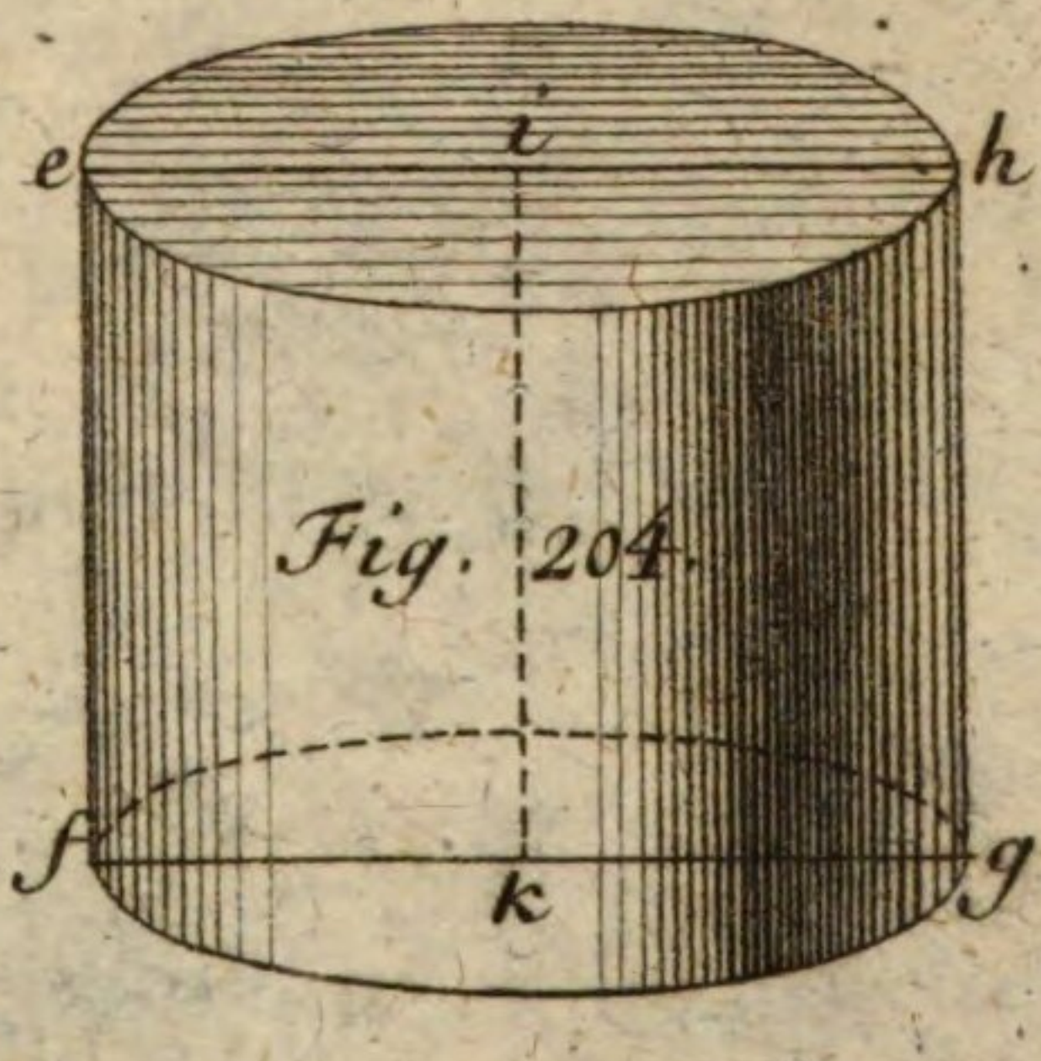


Fig. 204.

. 195

g. 20

Fig. 2

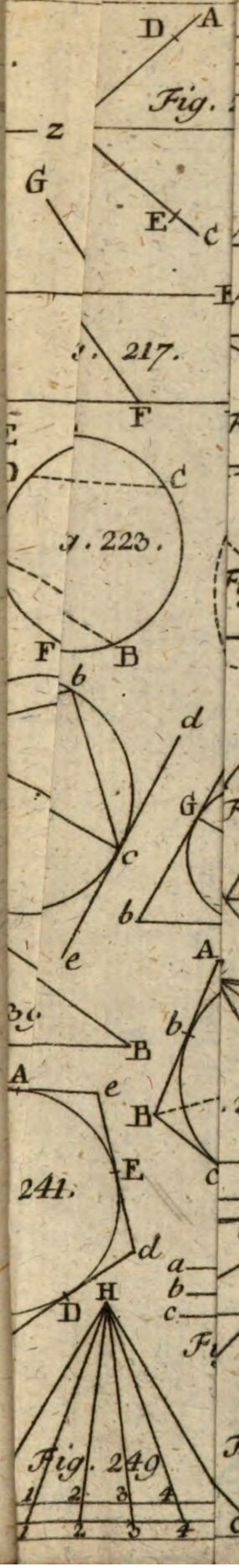


Fig. 217.

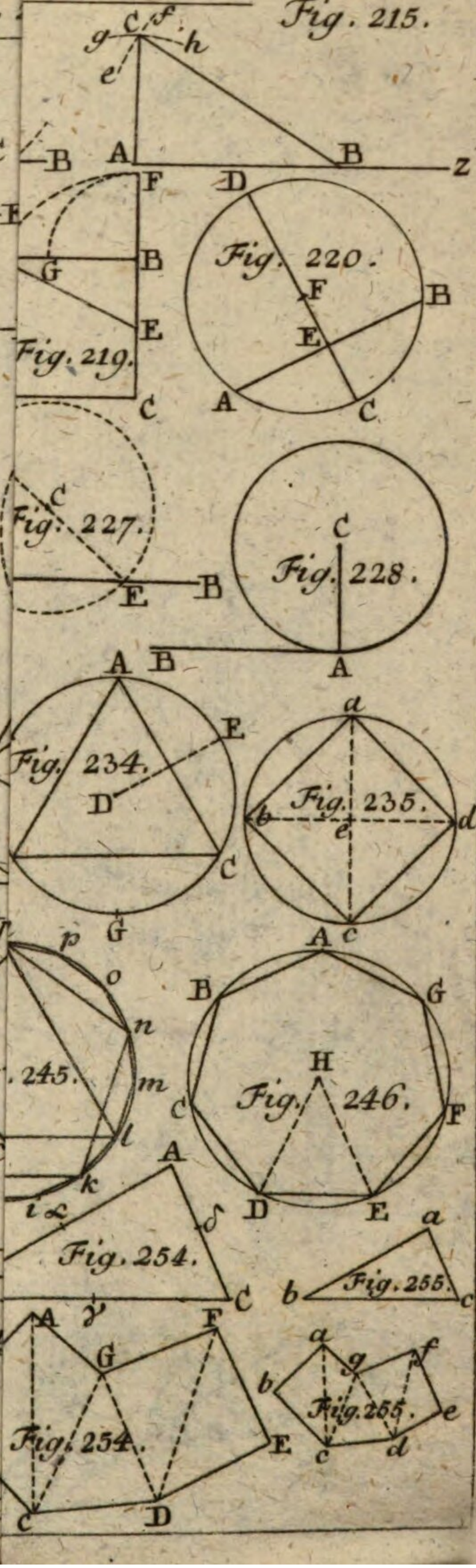


Fig. 215.

Fig. 219.

Fig. 220.

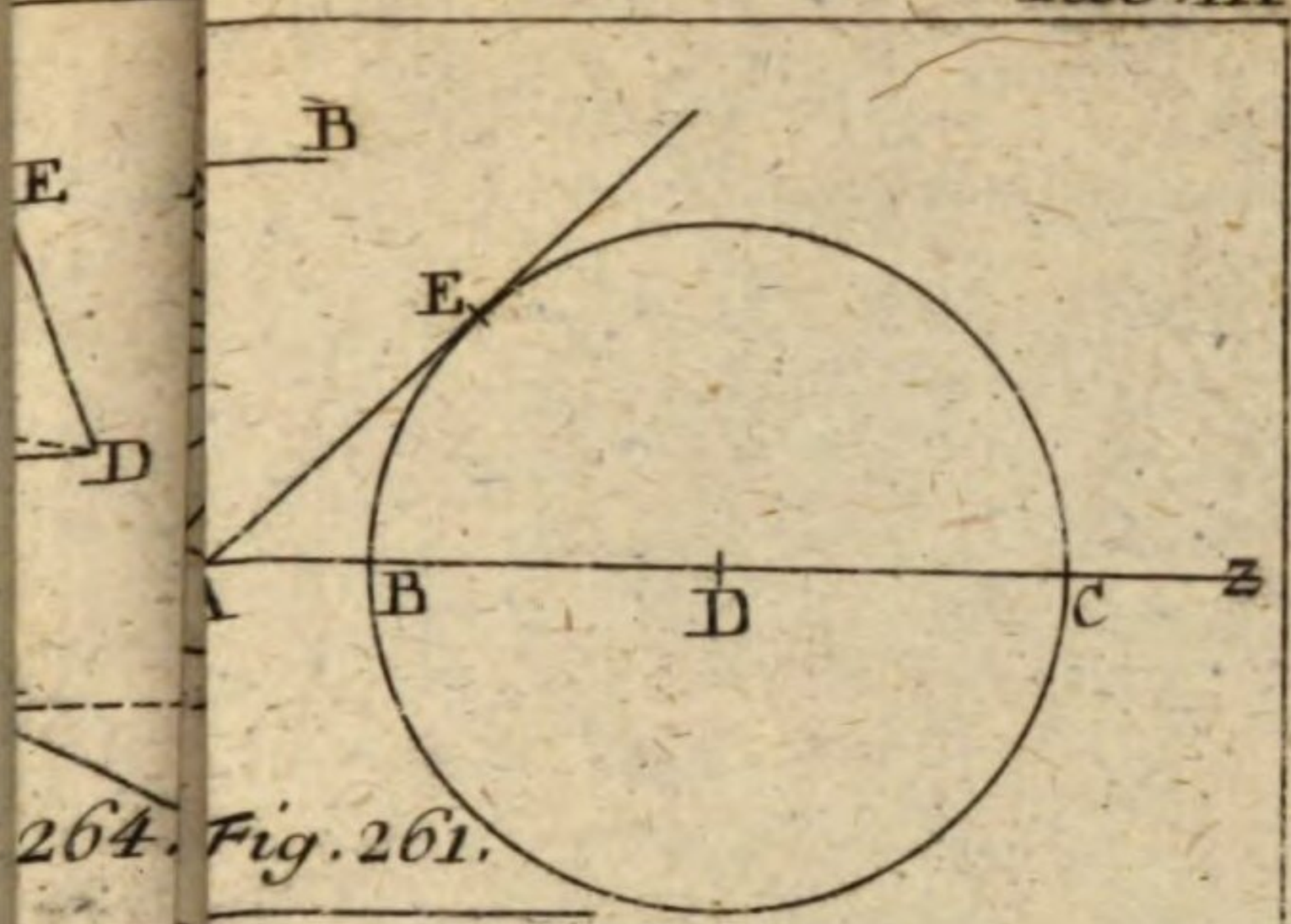
Fig. 223.

Fig. 227.

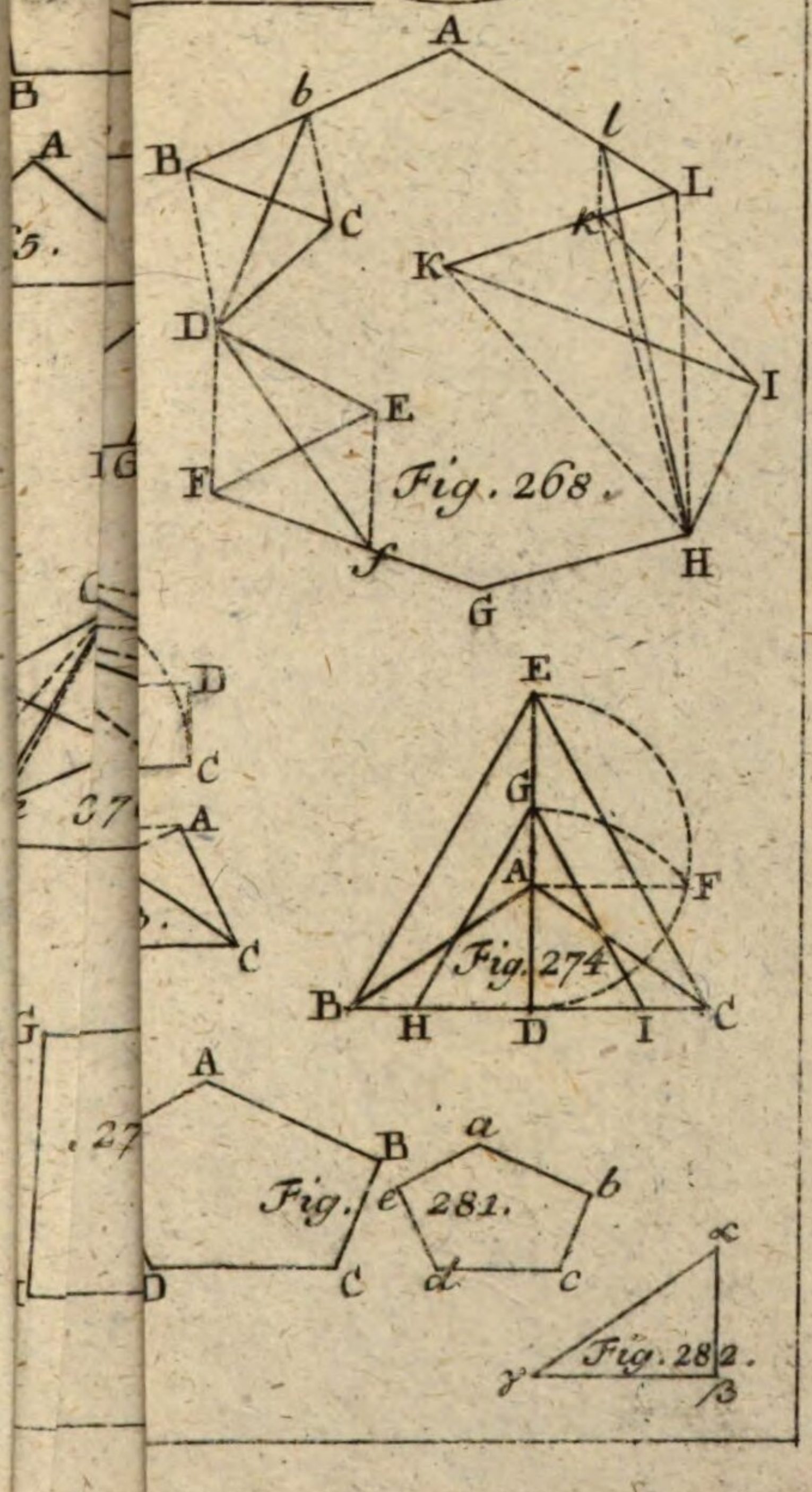
Fig. 228.

Fig. 249.

Fig. 254.


B
E
A
B
D
C
z

264. Fig. 261.


A
b
l
B
L
C
K
K
D
I
E
F
H
G
Fig. 268.
E
G
A
F
B
H
D
I
C
a
B
b
e
Fig. 281.
C
d
c
x
y
β
Fig. 282.

B
A
C
5.
G
D
C
27
A
C
G
A
27
B
C
D

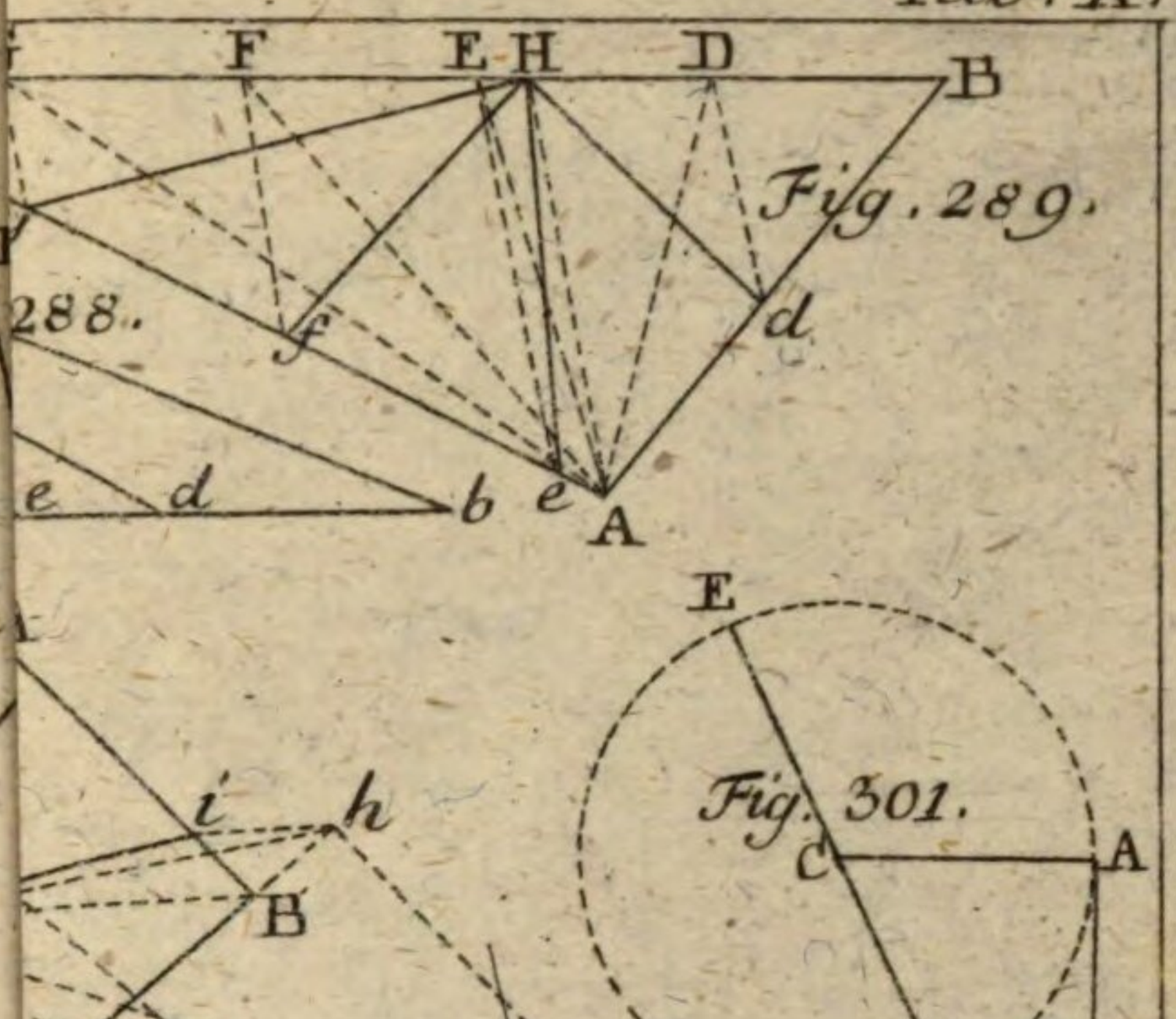


Fig. 289.

Fig. 288.

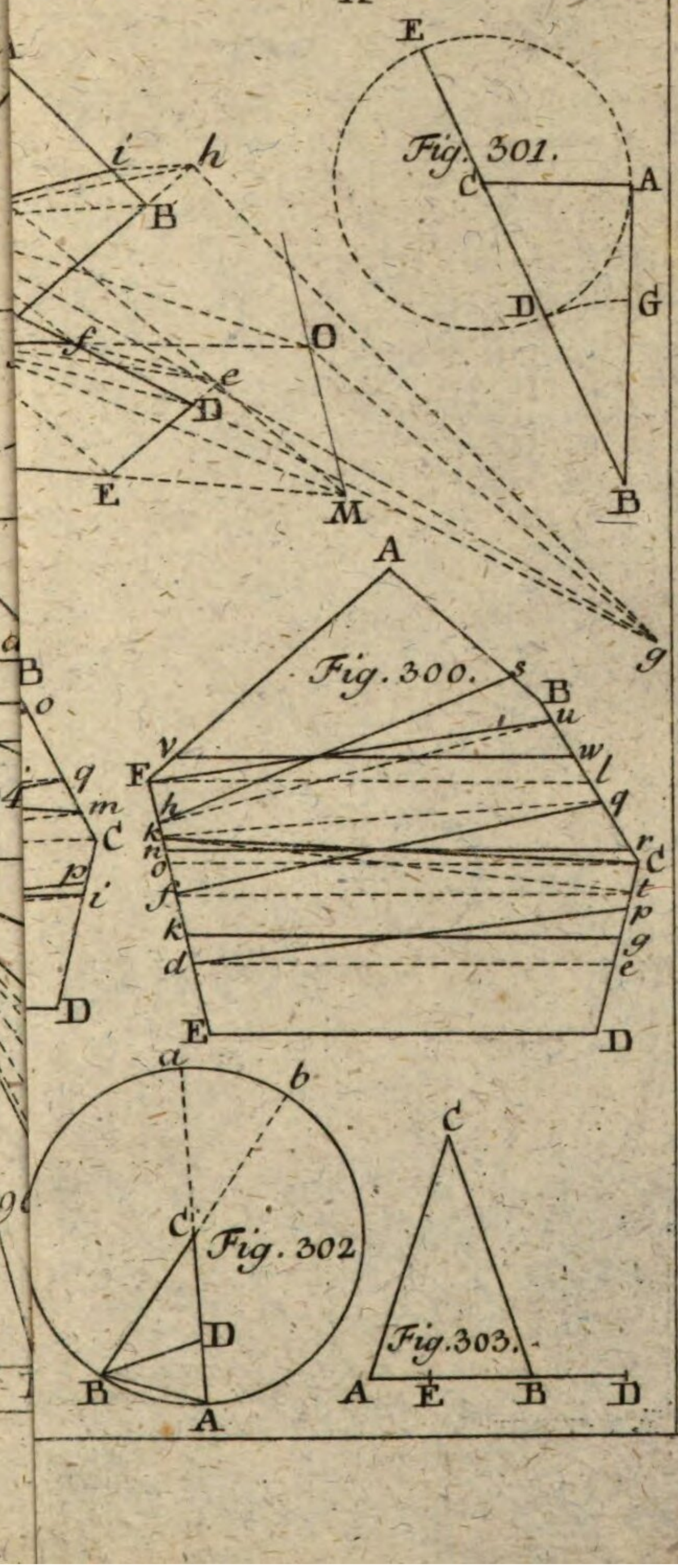


Fig. 301.

Fig. 300.

Fig. 296.

Fig. 302

Fig. 303.

Tab. XI.

Fig. 310.

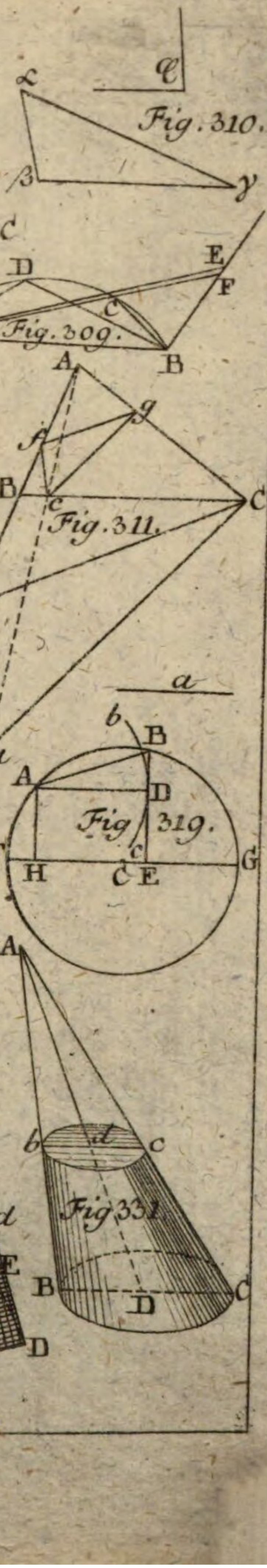


Fig. 309.

Fig. 311.

Fig 320.

Fig. 313.

Fig

Fig. 330.

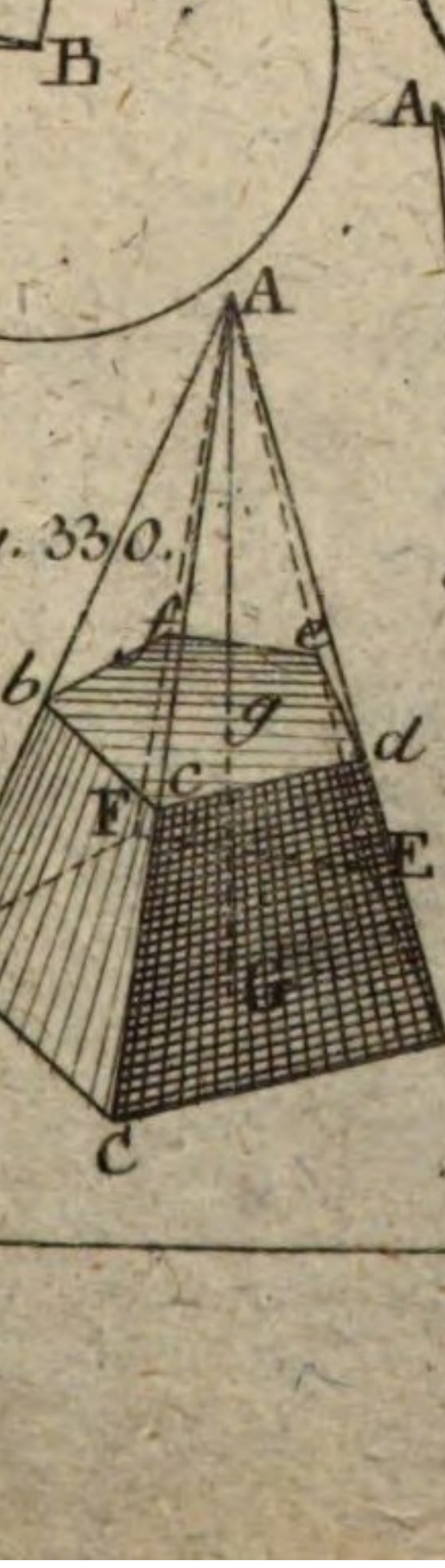


Fig 331.

Fig.

Till. Unt. fl. 11. 5

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schulze, Johann Karl, 1749-1790

Johann Carl Schulze, wirklichen Mitgliedes der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften, Lehrers der Mathematik beym Königl. Preuß. Feld-Artillerie-Corps, Taschenbuch für diejenigen, so gründliche Anwendungen der Meßkunst zu machen sich vorsetzen insbesondere aber zum Gebrauch meiner Vorlesungen
Bd.: 1

Berlin 1782

Math.p. 520-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10137810-0
VD18 90062116